西北大学2004年招收攻读硕士学位研究生试题

科目名称：高等代数	科目代码：436
适用专业：数学系各专业	共 2 页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

一、 计算行列式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & x & x \\ x & x & \cdots & x & a_1 & x \\ 2x & 2x & \cdots & a_2 & 2x & 2x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & nx & \cdots & nx & nx & nx \end{vmatrix}$，并求 $f(x)$ 的所有根.

二、 设 $f(x)=x^3-2x^2-3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 求 $f(A)$ 及 A^{-1}.

三、 讨论当 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解. 在无穷多解时，求其通解.

四、 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 在正交变换下的标准形，并写出简单过程.

五、 设 A 为任意 n 阶非零实方阵， A' 表示 A 的转置. 证明：$|AA'+E|>1$, 其中 E 为 n 阶单位阵.

六、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

科目名称：高等代数	科目代码：436
适用专业：数学系各专业	共 2 页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

七、设方阵 A 及 B 满足 $AB = aA + bB$, 其中 a, b 为常数且 $ab \neq 0$. 证明： $AB = BA$.

八、在 n 维线性空间 R 中, 设有线性变换 A 与向量 ξ, 使得 $A^{n-1}\xi \neq 0$, 而 $A^n\xi = 0$. 证明： $\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi$ 是 R 的一组基，并求 A 在这组基下的矩阵.

九、设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = A$. 证明： A 必相似于一个对角阵.

十、设 V 是一个 n 维欧氏空间， α 及 β 是 V 中两个线性无关的固定向量. 定义 $V_1 = \{x | (x, \alpha) = 0, (x, \beta) = 0, x \in V\}$. 证明： V_1 是 V 的 $n-2$ 维子空间.

十一、设 $f(x)$ 为首项系数为 1 的 $n(\geq 1)$ 次整系数多项式且满足

(i) $(f'(x), f(x)+1) = 1$;

(ii) $f(x)+1$ 的根均为整数.

证明： $f(x)$ 在有理数域上不可约.

十二、设 $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 n 维列向量， X' 表示 X 的转置，并令 $A = XX'$. 证明：当正整数 $m \neq n$ 时矩阵 $(A - mE)$ 一定可逆，并求其逆矩阵，其中 E 表示 n 阶单位阵.

注释：以上试题中，一至十题各 12 分，十一至十二题各 15 分，满分共计 150 分.