西北大学 2004 年招收攻读硕士学位研究生试题

| | |
|---|---|
| 科目名称:数学乙 | 科目代码:332 |
| 适用专业 | 共 3 页 |

*答案请答在试题纸上,答在本试题纸上的答案一律无效*

## 一填空题(每题 5 分,共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$__________.

2. 求 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在(1,0)点处的切线方程 y=2x-2 .

3. 微分方程 $xy'+y-e^x=0$ 的通解为 $y=$__________.

4. 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 的特解为____.

5. 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$__________.

6.设三阶方阵 A,B 满足关系式: $A^{-1}BA=6A+BA$ 且 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$,则

B=__________.

## 二 选择题(每题 5 分,共 20 分)

1.若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6+f(x)}{x^2}\right)$为(　)

(A) 0　　(B) 6　　(C) 36　　(D) $\infty$

2.设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调递增函数时, $F(x)$ 必为单调增函数.

3. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt = (\quad)$

(A) $\sin x^2$　　(B) $-\sin x^2$　　(C) $\sin x$　　(D) 0

4.设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2 = x$，且 $f'(0)=0$,则(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.　　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C)点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值,点 $(0,f(0))$ 不是曲线的拐点.

三　计算下列各题(每题 8 分,共 16 分)

1. 设 $\begin{cases} x=\int_0^t f(u^2)du \\ y=[f(t^2)]^2 \end{cases}$,其中 $f$ 有二阶导数,且 $f(u)\neq 0$,求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2. $\int \max(1,|x|)dx$

四(12 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x} & x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$,问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

五(12 分)设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1, x=t(t>1)$ 与 $x$ 轴所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周，所成旋转体的体积为 $v(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$,试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求此方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

六（12 分） 证明 $\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{dx}{x} = \int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{dx}{x}$.

七(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明在 $[0,a]$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

八(12 分).确定 $a,b$,使得当 $x\to 0$ 时，$a-\cos bx+\sin^3 x$ 与 $x^3$ 是等价无穷小.

九(12 分)设 $\lambda$ 为可逆矩阵 A 的特征值.证明:

(1) $\frac{1}{\lambda}$ 为 $A^{-1}$ 的特征值;

(2) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 $A^*$ 的特征值.

十(12 分)设线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$,证明:

(1) $a_1,a_2,a_3,a_4$ 两两不相同,则此线性方程组无解;

(2)设 $a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k(k\neq 0)$ 且已知 $\beta_1,\beta_2$ 是该方程组的两个解,其中 $\beta_1=(-1,1,1)^T,\beta_2=(1,1,-1)^T$,T 表示转置,写出此方程组的通解.