

科目名称: 高等代数

科目代码: 436

适用专业: 数学系各专业

共 2 页

答案请答在答题纸上, 答在本试题上的答案一律无效

一、 计算行列式  $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & \cdots & x & x & x \\ x & x & \cdots & x & a_1 & x \\ 2x & 2x & \cdots & a_2 & 2x & 2x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & nx & \cdots & nx & nx & nx \end{vmatrix}$ , 并求  $f(x)$  的

所有根.

二、 设  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . 求  $f(A)$  及  $A^{-1}$ .

三、 讨论当  $\lambda$  为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有唯一解, 无解, 有无穷多解. 在无穷多解时, 求其通解.

四、 求二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  在正交变换下的标准形, 并写出简单过程.

五、 设  $A$  为任意  $n$  阶非零实方阵,  $A'$  表示  $A$  的转置. 证明:  $|AA' + E| > 1$ , 其中  $E$  为  $n$  阶单位阵.

六、 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , 求可逆矩阵  $P, Q$  使得  $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

科目名称：高等代数

科目代码：436

适用专业：数学系各专业

共 2 页

答案请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

七、设方阵  $A$  及  $B$  满足  $AB = aA + bB$ , 其中  $a, b$  为常数且  $ab \neq 0$ . 证明:  $AB = BA$ .

八、在  $n$  维线性空间  $R$  中, 设有线性变换  $A$  与向量  $\xi$ , 使得  $A^{n-1}\xi \neq 0$ , 而  $A^n\xi = 0$ . 证明:  $\xi, A\xi, \dots, A^{n-1}\xi$  是  $R$  的一组基, 并求  $A$  在这组基下的矩阵.

九、设  $n$  阶实方阵  $A$  满足  $A^2 = A$ . 证明:  $A$  必相似于一个对角阵.

十、设  $V$  是一个  $n$  维欧氏空间,  $\alpha$  及  $\beta$  是  $V$  中两个线性无关的固定向量. 定义  $V_1 = \{x | (x, \alpha) = 0, (x, \beta) = 0, x \in V\}$ . 证明:  $V_1$  是  $V$  的  $n-2$  维子空间.

十一、设  $f(x)$  为首项系数为 1 的  $n(\geq 1)$  次整系数多项式且满足

(i)  $(f'(x), f(x) + 1) = 1$ ;

(ii)  $f(x) + 1$  的根均为整数.

证明:  $f(x)$  在有理数域上不可约.

十二、设  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  为  $n$  维列向量,  $X'$  表示  $X$  的转置, 并令

$A = XX'$ . 证明: 当正整数  $m \neq n$  时矩阵  $(A - mE)$  一定可逆, 并求其逆矩阵, 其中  $E$  表示  $n$  阶单位阵.

注释: 以上试题中, 一至十题各 12 分, 十一至十二题各 15 分, 满分共计 150 分.