西北大学2007年招收攻读硕士学位研究生试题

科目名称：　高等代数

科目代码：　434

适用专业：　基础数学、计算数学、应用数学　　　　　　共 2 页

答题请答在答题纸上，答在本试题上的答案一律无效

一、判断题（本题共5小题，每小题3分，共15分）判断下列陈述是否正确。若正确，请在括弧内打"+"；若错误，请在括弧内打"—"。

1、次数大于零的整系数多项式在有理数域上可约的充分必要条件是它在整数环上可约。　第一章　　　　（−）

2、若矩阵 A 与 B 都可对角化，则 A 与 B 相似的充要条件是 A 与 B 有相同的特征多项式。　　　　（+）

3、齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解的充要条件为秩 $(A)=$ 秩 (B)。　　　　（−）

4、如果 V_1,V_2,V_3 都是线性空间 V 的子空间，并且 $V_1\cap V_2=V_1\cap V_3=V_2\cap V_3=\{0\}$，则 V_1,V_2,V_3 的和 $V_1+V_2+V_3$ 是直和。　　　　（+）

5、设 Φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，则 V 必是 Φ 的值域 ΦV 与核 $\Phi^{-1}(0)$ 的直和。　　　　（+）

二、填空题（本题共5小题，每小题5分，共25分）

1、设行列式 $D=\begin{vmatrix}2&1&0&0\\0&1&0&0\\2&4&6&8\\1&3&0&1\end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}\ (i,j=1,2,3,4)$，则

$A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=$ __6__。

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，三阶方阵 B 满足 $A^2B-A-B=E$，则 B 的行列式

$|B|=$ __$\frac{1}{2}$__。　矩阵　第4章

3、若向量组 $\alpha_1=(3,t+1,5)$，$\alpha_2=(t,1,1)$，$\alpha_3=(0,t,4)$ 线性相关，则实数 t 应满足的条件为 __$t=3$ or $t=4$__。

4. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则

要条件是 ___$m<n$___。

5. 若 $V=\{(a+bi,c+di)\mid a,b,c,d\in R\}$，则 V 对于通常的加法和数乘，在复数域 C 上是___2___维线性空间，在实数域 R 上是___4___维线性空间。

三、（10分）求行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$。

四、（10分）设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是互不相同的整数。证明：$f(x)$ 在有理数域中不可约。

五、（20分）设 A 为 $s\times n$ 矩阵，秩为 r，线性方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 有特解 ξ_0，其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$，证明：

(1) $\xi_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关。

(2) $\xi_0,\xi_0+\eta_1,\xi_0+\eta_2,\cdots,\xi_0+\eta_{n-r}$ 为 $AX=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量。

(3) 方程组 $AX=b$ 的任一个解 γ，都可表成

$$\gamma=k_0\xi_0+k_1(\xi_0+\eta_1)+k_2(\xi_0+\eta_2)+\cdots+k_{n-r}(\xi_0+\eta_{n-r})，$$

其中 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$。

六、（15分）设 A 为正定矩阵，证明：$A^{-1}+A^*$ 也为正定矩阵，其中 A^{-1}、A^* 分别为 A 的逆矩阵和伴随矩阵。

七、（15分）设 A 是数域 P 上的 n 阶方阵满足 $A^2=A$，E 是 n 阶单位矩阵。齐次方程组 $AX=0$ 的解空间为 W_1，$(A-E)X=0$ 的解空间为 W_2。试证 $P^n=W_1\oplus W_2$。

八、（15分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，σ 是 V 上的线性变换。证明：σ 是可逆的当且仅当 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是 V 的基。

九、（10分）设 V 为 n 维欧氏空间，V_1,V_2 都是 V 的 m 维子空间，证明：存在 V 的正交变换 σ，使 $\sigma(V_1)=V_2$。

十、（15分）试用正交线性替换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_3x_4$ 化成标准形，并写出所用的正交线性替换。