

科目: 离散数学 2000'

题号 462

所有试题一律答在答题纸上

共 1 页 第 1 页

(30分) 请回答下列各题

设 $\langle A, * \rangle$ 是一个代数系统, 其中, $*$ 是 A 上的二元运算, 请用一个谓词公式定义该运算是可结合且可交换的。

你能否论证下面关于集合的命题? 请说明理由。

若 $A \cup B = A \cup C$ 则必有 $B = C$ 。

设 $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 是定义在自然数集合 \mathbb{N} 上的皮亚诺后继函数, S 是单射函数、满射函数、双射函数吗? 为你的回答说明理由。

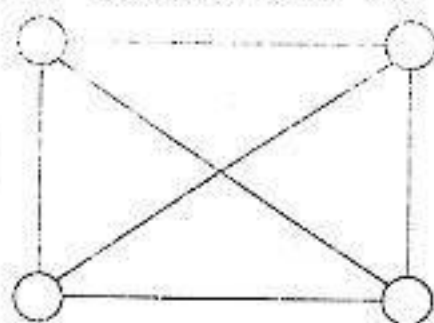
设 $A_1 = \langle S_1, * \rangle$ 和 $A_2 = \langle S_2, + \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 $+$ 都是二元运算符。定义:

$A = \langle S_1 \times S_2, \square \rangle$, 其中, $S_1 \times S_2$ 表示集合 S_1 和 S_2 的笛卡儿积, 且设

$\langle a_1, b_1 \rangle$ 和 $\langle a_2, b_2 \rangle$ 都是 $S_1 \times S_2$ 的元素, 则

$\langle a_1, b_1 \rangle \square \langle a_2, b_2 \rangle$ 定义为 $\langle a_1 * a_2, b_1 + b_2 \rangle$, 试问 A 是代数系统吗? 若 A_1 和 A_2 都是群, 则 A 也是群吗? 请为你的答案说明理由。

什么是图? 下面的图是否能一笔画完? 为什么?



(15分) 假定 14 位学生在某次期末考试后, 9 位同学数学得了优; 5 位同学物理得了优; 4 位同学化学得了优。其中, 物理和数学皆得优的同学有 4 人, 数学和化学都得优的同学有 3 人, 物理和化学都得优的同学有 3 人, 三门都得了优同学有 2 人。问: 恰有两门为优的同学有几人?

(15分) 请用谓词公式描述偏序集合 $\langle A, \leq \rangle$ 上存在极大元素的概念, 并证若 A 是非空有限集合, 则 A 中一定有极大元素。

(15分) 设 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, G 是定义在 S 上的一个置换群。定义 S 上一个二元关系 R 如下:

$i R j \Leftrightarrow G$ 中存在置换 p 将 i 置换为 j 。

证 R 是 S 上的等价关系。

(15分) n 个城市用 k 条公路的网络连结 (一条公路定义为两个城市间的一条不穿过任何中间城市的道路)。证明, 如果 $k > (n-1)(n-2)/2$, 则人们总能通过连结的公路, 在任何两个城市间旅行。

(10分) 设 A 是非空集合, $|B| > 1$, 证明 $|A| < |B^A|$ 。