西北工业大学

2002 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：数学分析　　　　　　　　　　　　　　　　试题编号：334

说明：所有试题一律写在答题纸上　　　　　　　　　　共 1 页 第 1 页

以下各题均为 10 分。

1. 设 p 为自然数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.(b为有限数)

3. 已知 $f(x)$ 连续，$\int_0^x tf(x-t)dt=1-\sin x$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

4. 设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & 当(x,y)\neq(0,0)时 \\ 0 & 当(x,y)=(0,0)时 \end{cases}$$

求 $f''_{xy}(0,0)$，$f''_{yx}(0,0)$.

5. 设立体 V 由抛物面 $x^2+y^2=az(a>0)$，柱面 $x^2+y^2=2ax$ 与平面 $z=0$ 围成，求 V 的体积。

6. 考察函数列 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}(n=1,2,\cdots)$ 分别在区间 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上是否一致收敛。

7. 当 $x>0$ 时，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的敛散性。

8. 设 $0<a<b$，求 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$。

9. 设 C 为围成平面区域 D 的光滑闭曲线，$f(x,y)$ 在 D 上二阶可导，$\dfrac{\partial f}{\partial n}$ 为 $f(x,y)$ 在 C 上的外法向量 n 的方向导数，证明

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\oint_C\frac{\partial f}{\partial n}ds.$$

10. 设 $\{f_n(x)\}$ 定义在 $[a,b]$ 上，每个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导函数，$x_0\in[a,b]$ 为 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点，$\{f'_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$，证明：1）$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛，2）$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。