

2002.

西北工业大学研究生入学试题

考试科目：离散数学

说明：所有试题一律答在答题纸上

题号 462
共 1 页 第 1 页

1. (20分) 设有一个代数系统 $G = \langle G, \cdot \rangle$, G 不空。“ \cdot ”是 G 上的一个二元运算。用谓词 $G(x)$ 表示 x 是载体集合 G 中的元素。函数符号“ \cdot ”和相等谓词“ $=$ ”就直接使用其中缀表示形式。该代数系统有以下公理：

$$(A1) \exists x G(x);$$

$$(A2) \forall x \forall y (G(x) \wedge G(y) \rightarrow \exists z (G(z) \wedge x \cdot y = z));$$

$$(A3) \forall x \forall y \forall z (G(x) \wedge G(y) \wedge G(z) \rightarrow x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z);$$

$$(A4) \forall x \forall y (G(x) \wedge G(y) \rightarrow \exists z (G(z) \wedge x \cdot z = y));$$

$$(A5) \forall x \forall y (G(x) \wedge G(y) \rightarrow \exists z (G(z) \wedge z \cdot x = y)).$$

请证明，下面的谓词公式可从以上公理（前提）推出：

$$\exists w (G(w) \wedge \forall x (G(x) \rightarrow w \cdot x = x))$$

2. (20分) 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集，对任意 $a \in A$ ，令 $f(a) = \{x \mid x \in A, x \leq a\}$ ，证明， f 是从 A 到 2^A (A 的幂集) 的一个单射，且当 $a \leq b$ 时，有 $f(a) \subseteq f(b)$ 。

3. (20分) 设 G 是可交换群，证明， G 中一切有限阶元素所成集合 T 是 G 的一个正规子群，且 G/T 除单位元外，不含有限阶元素。

4. (15分) 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是顶点数大于或等于 3 的简单无向图，若 G 不是哈密尔顿图，则至少有一顶点 v ，其度适合 $d(v) < \frac{|V|}{2}$ 。

5. (15分) 设 $\langle A, +, \cdot \rangle$ 是含么环，若 $a \in A$ 对乘法运算可逆，则 a 一定不是零因子。

6. (10分) 有 A 、 B 两人交替从一堆 100 根火柴棍中取火柴棍，该谁取时最多可取 10 根，但不能不取，最后将火柴棍取完者胜。设 A 先取，请给出 A 必胜的取法。