

西北工业大学
2003 年硕士研究生入学考试试题

试题名称: 计算方法

说明: 所有试题一律写在答题纸上

试题编号: 415

第 1 页 共 2 页

一 (10 分) 设 x^* 为 x 的近似数, 证明 $\sqrt{x^*}$ 的相对误差大约为 x^* 相对误差的 $\frac{1}{2}$ 倍。

二 (15 分) 设被插值函数 $f(x) \in C^1[a, b]$, $H_3^{(h)}(x)$ 是 $f(x)$ 关于等距节点 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ 的分段三次埃尔米特插值函数, 步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 试估计 $\|f(x) - H_3^{(h)}(x)\|_\infty$ 。

三 (20 分) (1) 验证 $1, x, 2x^2 - 1$ 在 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交;

(2) 确定参数 a, b, c , 使得积分

$$I(a, b, c) = \int_{-1}^1 \left[ax^2 + bx + c - \sqrt{1-x^2} \right]^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

取得最小值, 并估计平方误差。要求小数点后至少保留 5 位。

四 (20 分) 已知 $x_0 = 1/4, x_1 = 1/2, x_2 = 3/4$,

(1) 推导以这三个点作为求积节点在 $[0, 1]$ 上的插值型求积公式;

(2) 指出求积公式所具有的代数精确度;

(3) 用所求公式计算 $\int_0^1 x^2 dx$

五 (10 分) 用直接三角分解法 (LU 分解法) 解方程组:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 18 \\ 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

西北工业大学
2003 年硕士研究生入学考试试题

试题名称: 计算方法
说明: 所有试题一律写在答题纸上

试题编号: 415
第 2 页 共 2 页

六 (20 分) 给定线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. 用迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha (b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

求解 $Ax = b$. 问 α 取何值时迭代法收敛? α 取何值时迭代法收敛最快?

七 (15 分) 给定方程 $(x-2)e^x = 1$, 已知它在 $[2, 3]$ 有惟一实根 α , 试构造一迭代公式, 论证其收敛性, 并求根 α 的近似值 x_n , 使 $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-5}$.

八 (15 分) 对矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

用反射变换将 A 相似变换为三对角阵.

九 (25 分) (1) 用欧拉预估-校正公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y + y^2 \sin x = 0, & 1 < x \leq 1.4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

取步长 $h = 0.2$, 计算 $y(1.2)$ 、 $y(1.4)$ 的近似值 (小数点后至少保留 5 位).

(2) 已给显式方法

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h[\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n]$$

(a) 取 α_1 为参数, 确定 α_0 、 β_0 和 β_1 , 使方法至少是二阶的;

(b) 当 α_1 取何值时, 方法零稳定?