西北工业大学
2004年硕士研究生入学考试试题

试题名称：数学分析与高等代数
说　　明：所有答题一律写在答题纸上

试题编号：331

一、(10分) 设$\{a_n\}$为某个数列，并且极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$；根据极限定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0.$$

二、(10分) 根据级数理论证明不等式：

$$e^x+e^{-x}\le 2e^{\frac{x^2}{2}},\quad x\in R.$$

三、(15分)假定函数$f(x,y)$, $F(x,y)$在矩形$D=[a,b]\times[c,+\infty)$上连续，并且

$$|f(x,y)|\le F(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

如果广义积分$\int_c^{+\infty}F(x,y)\mathrm{d}y$关于参变量$x$在区间$[a,b]$上一致收敛，那么广义积分$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$关于参变量$x$在区间$[a,b]$上也一致收敛.

四、(15分) 求积分$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，这里$\Sigma$是椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$上半部的上侧.

五、(15分) 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上单调增．如果极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

存在，那么函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上有界.

六、(15分) 假设

(1) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上处处收敛，令$f(x)$为极限函数.

(2) 每个函数$f_n(x)$可导，导函数$f_n'(x)$连续，并且导函数列$\{f_n'(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛.

根据微积分基本公式证明：(i) 函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛于函数$f(x)$；(ii) 函数$f(x)$可导.

西北工业大学
2004年硕士研究生入学考试试题

试题名称：数学分析与高等代数
说　　明：所有答题一律写在答题纸上

七、（15分）设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$B^*$ 表示 B 的伴随矩阵，E 表示单位矩阵，求矩阵 X 使满足 $X+B^*XA=XA+B^*X+E$.

八、（15分）设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\a\\1\\a\end{bmatrix}$，$\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\1\\a\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix}b\\1\\b\\1\end{bmatrix}$.

1．当 a 与 b 取何值时，β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示；

2．当 a 与 b 取何值时，β 能够由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示．当表示式不唯一时，求出 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的表示式.

九、（10分）设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的 m 重特征值，正整数 k 满足 $1\le k\le m$．证明：$(\lambda-\lambda_0)^m$ 是 A 的 k 个初等因子的乘积的充要条件是 $\operatorname{rank}(\lambda_0E-A)=n-k$，其中 E 表示 n 阶单位矩阵.

十、（15分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+bx_2^2-x_3^2-2x_1x_2+2bx_1x_3-2x_2x_3$（$b$ 为实数）的秩为2.

1．求实数 b；

2．用正交变换将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出使用的正交变换；

3．问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面？

西北工业大学
2004年硕士研究生入学考试试题

十一、（15 分）设矩阵空间 $\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中的线性变换为

$$T(X)=XB+X^{T},\quad \forall X\in \mathrm{R}^{2\times 2},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

线性子空间 $V=\left\{X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}x_1-x_4=0\\x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}$.

1. 验证 V 是 T 的不变子空间；
2. 将 T 看作 V 中的线性变换，求 V 的一个基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.