西北工业大学
2004年硕士研究生入学考试试题

试题名称：概率论　　　　　　　　　　　　试题编号：408
说　　明：所有答题一律写在答题纸上　　　　第 1 页 共 3 页

一、（本题满分 15 分）

袋中有 6 个白球和 4 个黑球，今掷一均匀骰子，掷出几点就从袋中取出几个球，问取出的球全部是白球的概率是多少？若已知取出的全是白球，问骰子掷出的是 3 点的概率又是多少？

二、（本题满分 15 分）

设 A,B,C 是概率空间（$\Omega, \Re, P$）上的随机事件，$P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{5}, P(C)=\frac{1}{6}$，$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{8}, P(ABC)=\frac{1}{10}$，求下列事件的概率：

（1）A,B,C 至少有一件发生；（2）A,B,C 恰有一件发生；（3）A,B,C 至少有一件发生的条件下，A,B,C 恰有 2 件发生。

三、（本题满分 24 分）

假设一部机器的 5 个电动机中，只要至少有 3 个运转，它就能有效地工作，设这些电动机彼此独立地运转，而且每台运转的总时数的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

求此机器持续工作时间的密度函数、数学期望和方差。

四、（本题满分 24 分）

设随机变量ξ与η相互独立 且同分别服从伽玛分布$G(\lambda, r_1)$和$G(\lambda, r_2)$，$G(\lambda, r)$的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}, 0\le x<\infty\\ 0, 其他\end{cases}$$

令$U=\xi-\eta, V=\dfrac{\xi}{\eta}$

（1）求(U, V)的联合密度函数；

（2）问U与V是否相互独立，为什么？

（3）求EV, DV。

五、（本题满分 24 分）

设随机变量ξ的密度函数是偶函数，且$E\xi^2<\infty$，试问：

（1）ξ与$|\xi|$是否不相关，为什么？

（2）ξ与$|\xi|$是否相互独立，为什么？

（3）设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$独立且与ξ同分布，$D\xi=\sigma^2$，求$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1)$，

使得$D(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i)$达到最小。

六、（本题满分 24 分）

若随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立同服从泊松$P(\lambda)$分布，记

$$\eta_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-E\xi_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D\xi_i}}$$

试计算η_n的特征函数，并求$n\to\infty$时的极限。

西北工业大学

2004 年硕士研究生入学考试试题

试题名称：概率论　　　　　　　　　　　　　　　　　　试题编号：408

说　明：所有答题一律写在答题纸上　　　　　　　　　　

七、（本题满分 24 分）

对随机变量序列 $\{\xi_n, n\geq 1\}$，若记 $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\xi_i$，证明 $\{\xi_n, n\geq 1\}$ 服从大数定律的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{(\eta_n-\mu_n)^2}{1+(\eta_n-\mu_n)^2}\right\}=0$$