

西北工业大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

试题名称: 数学分析 (A 卷)

试题编号: 734

明: 所有答题一律写在答题纸上

第 1 页 共 1 页

一、(本题满分 15 分)

假定 $a_n > 0 (\forall n \geq 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 假设存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 证明 $l \leq 1$.

二、(本题满分 20 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{A \ln(1-x) + B(1 - e^{-x^2})} \quad (A \neq 0)$.

三、(本题满分 15 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 存在数列 $x_n \in [a, b]$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, 证明: 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = A$.

四、(本题满分 20 分)

(1) 写出对数函数 $\ln(1+x)$ 在点 $x=0$ 邻近的 n 阶泰勒公式(带皮亚诺型余项);

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

五、(本题满分 20 分)

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可导, 导函数 $f'(x)$ 可积, 并且 $f(b) - f(a) = 1$. 证明:

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \geq \frac{1}{b-a}.$$

六、(本题满分 10 分)

设常数 $p > 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = 0$.

七、(本题满分 20 分)

求积分 $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx$.

八、(本题满分 30 分)

(1) 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的收敛域以及和函数 $S(x)$.

(2) 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内收敛, 并且和函数 $f(x)$ 连续;

(3) 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内不一致收敛.