

西北工业大学 2007 年硕士研究生入学考试试题

试题名称: 数学(理学)(A 卷)

试题编号: 732

说明: 所有答题一律写在答题纸上

第 1 页 共 2 页

一、解答题(本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分共 30 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

2. 设函数 $f(x) = g(x)[\sin(x - x_0)]^a$, ($a \geq 1$), 其中 $g(x)$ 在 x_0 处连续, 讨论 $f(x)$ 在 x_0 处的可导性.

3. 计算定积分 $\int_0^{2a} x\sqrt{2ax - x^2} dx$.

4. 求曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2$ 平行于平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程.

5. 求微分方程 $x \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ 的通解.

6. 设方阵 A 满足 $2007A = 10A^2 + 100E$, 试用 A 表达 $(A - 200E)^{-1}$.

二、解答题、证明题(本题共 6 小题, 每小题 10 分, 满分共 60 分)

7. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\arctan x - \ln \frac{1+x}{1-x}}{x^a} = b (\neq 0)$, 求 a, b 的值.

8. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 讨论 $x = 0$ 是否是 $f(x)$

的极值点, 若是极值点, 是极大值点还是极小值点.

9. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x)F(x) = \frac{xe^x}{2(1+x)^2}$. 已知

$F(0) = 1, F(x) > 0$, 试求 $f(x)$.

10. 设 $z = f(g(x) - 2y, h(y) + x^2)$, 求 z_x, z_{xy} .

11. 证明不等式: $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

西北工业大学
2007 年硕士研究生入学考试试题

试题名称: 数学(理学)(A 卷)

试题编号: 732

说明: 所有答题一律写在答题纸上

第 2 页 共 2 页

12. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 令 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots,$

$\beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + \alpha_m, \beta_m = \alpha_m + \alpha_1$, 讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 的线性相关性.

三、解答题、证明题(本题共 5 小题, 每小题 12 分, 满分共 60 分)

13. 在第一象限内求曲线 $y = 1 - x^2$ 上的一点, 使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围图形的面积为最小, 并求此最小面积.

14. 设对任意 $x > 0$, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处切线在 y 轴上的截距等于

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \text{求 } f(x) \text{ 的一般表达式.}$$

15. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 具有 $n-1$ 阶连续导数, 讨论 $f^{(n)}(a)$ 的存在性, 若存在, 求其值.

16. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 可导, $f(0) = f(1) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - 1}{(x - \frac{1}{2})^2} = 1, \text{证明}$$

(1) 存在点 $\eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 必存在 $\xi \in (0, \eta)$, 使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$;

(3) $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的最大值大于 1.

17. a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2ax_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + bx_3 = 4 \end{cases}$$

有唯一解, 无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时写出方程组的通解.

(完)