

西北工业大学

2008 年博士研究生第二次招生考试试题

试题名称：组合数学 A 卷

共 2 页 第 1 页

说明：所有试题一律写在答题纸上

Note: There are some questions written in English. You can answer all questions in Chinese. (考生可以用中文解答所有问题)

一、证明下列各题 (第 1 小题 8 分, 第 2 小题 16 分, 共 24 分)

1. 给出等式 $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$ 的组合证明。2. 已知 Fibonacci 数定义为 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_1 = F_2 = 1$.a) 证明等式: $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$;b) 证明逢 5 的 Fibonacci 数 F_{5k} 一定是 5 的倍数。

二、选做题 以下 5 个小题, 每小题 8 分, 考生可任选其中 3 题, 共 24 分。Calculate the following expressions:

a) $\sum_{k=1}^n \binom{2+k}{2} = ?$

b) Find integers a, b, and c such that $m^3 = a \binom{m}{3} + b \binom{m}{2} + c \binom{m}{1}$ for all m.c) How many seven-digit numbers are there such that the digits are distinct integers taken from $\{1, 2, \dots, 9\}$ and such that the digits 3 and 4 do not appear consecutively in either order?d) What is the coefficient (系数) of $x_1^3 x_2^2 x_3 x_4^2$ in the expansion of $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^4$?

e) 求 1、3 出现偶数次, 2、4 出现奇数次、7 至少出现一次的 n 位八进制数的个数。

三、(12 分) 求解递推公式:

a) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

b) $a_0 = 2, a_n^2 - 2a_{n-1}^2 = 1$

西北工业大学

2008 年博士研究生第二次招生考试试题

试题名称: 组合数学 A 卷

共 2 页 第 2 页

四、(10 分) 在如下的 6×6 棋盘格内上, 放置 6 个棋子, 要求不能在同一行或同一列中出现两个或两个以上的棋子, 且在棋盘中有 “ \times ” 的地方不能放置任何棋子, 请问共有多少放置方法?

\times					
\times	\times				
		\times	\times		
		\times	\times		
		\times	\times		

五、(10 分) 证明任意 52 个正整数中, 总存在两个数, 其差或和能被 100 整除。

六、下面二小题考生可任选一题

a) (10 分) 设 D_n 表示 n 个元素排列时的错排方案数, 试证明 D_n 是偶数当且仅当 n 是奇数。

b) (10 分) 设 S_4 是四阶对称群

i. 给出 S_4 中的所有偶置换构成的 4 阶交代群 A_4 中全体元素。

ii. 给出 S_4 的所有共轭类, 并计算各共轭类中不同置换的个数。

七、(10 分) 用 m 种颜色给一个正六边形金属框的六条边框着色, 共有多少不同的着色方案?

请在表格框内填写试题内容。