西北工业大学

2008年博士研究生第二次招生考试试题

试题名称：矩 阵 论

说明：所有试题一律答在答题纸上　　　　（A题） 共 2 页　第 1 页

一、计算题(16分)

（第1、3、4题要求写出计算过程）

1. 设向量空间$\mathbf{R}^2$按照某种内积（不一定是通常的）构成欧氏空间，它的两个基为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1)$和$\boldsymbol{\beta}_1=(0,2)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,4)$，且$\boldsymbol{\alpha}_i$与$\boldsymbol{\beta}_j$的内积为$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=1$，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=5$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=-1$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=1$，求基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$的度量矩阵.

2. 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\in\mathbf{C}^2$.

(1) $\|x\|=\sqrt{x^{\mathrm{H}}Ax}$是否构成$\mathbf{C}^2$中的向量范数？（①）

(2) $\|\overline{\mathrm{vec}}(A)\|_\infty=$（②）　（$\overline{\mathrm{vec}}(A)$表示将$A$按行拉直构成的列向量）

(3) $\|A\otimes A\|_\infty=$（③）

(4) $\|A\otimes A\|_{m_1}=$（④）

3. 设$A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，列向量$b\in\mathbf{C}^m$，列向量$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in\mathbf{C}^n$，且$A$和$b$与$x_1,\cdots,x_n$无关，令$f(x_1,\cdots,x_n)=\|b-Ax\|_2^2$，求$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

4. 设$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$为正交矩阵，构造分块矩阵$B=[A \mid 2A \mid A^2]$，求$B^+$.

二、证明题(10分)

设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$满足$A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}$，且$A$的全体特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，证明：

1. $\|A\|_F=\sqrt{|\lambda_1|^2+\cdots+|\lambda_n|^2}$；

2. $\|A\|_2=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$.

三、计算题（15 分） 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}$，$b(t)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$x(0)=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$.

1. 求 e^{At}；
2. 用矩阵函数方法求微分方程 $\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)+b(t)$ 满足初始条件 $x(0)$ 的解.

四、计算题（10 分） 用 Householder 变换求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的 QR 分解.

五、计算题（10 分） 用 Gerschgorin 定理隔离矩阵 $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -0.1 & 1\\ 0 & 2 & 0.1 & -1\\ -5 & 5 & -4i & 2.5\\ 0 & 0.3 & 0.2 & 2i\end{bmatrix}$

（$i=\sqrt{-1}$）的特征值.（要求画图表示）

六、计算题（15 分） 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

1. 求 A 的满秩分解；
2. 求 A^{+}；
3. 用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $Ax=b$ 是否有解；
4. 求线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解，或者极小范数最小二乘解 x_0.

（要求指出所求的是哪种解）

七、计算题（15 分） 设矩阵空间 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的子空间为

$$V=\left\{X=(x_{ij})_{2\times 2}\,\middle|\,x_{11}-2x_{12}-2x_{21}+x_{22}=0,\ x_{ij}\in\mathbf{R}\right\}$$

V 中的线性变换为 $T(X)=X+X^{T}$ $(X\in V)$，求 V 的一个基，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.

八、证明题（9 分） 设 V 是数域 K 上的 2 维线性空间，V 的一个基为 α_1,α_2. 两个子空间为 $W_1=\{k_1(\alpha_1+\alpha_2)\mid k_1\in K\}$，$W_2=\{k_2(\alpha_1-\alpha_2)\mid k_2\in K\}$. 证明：$V=W_1\oplus W_2$，即 V 可分解为 W_1 与 W_2 的直和.

（完）