

西北工业大学

2008 年博士研究生第二次招生考试试题

试题名称: 应用数学专业综合一

共 2 页 第 1 页

1. 填空 (共 18 分)

(1) 设近似数 $x_1^* = 9.2270$, $x_2^* = 0.8009$ 都是“四舍五入”得来的,则相对误差 $|e_r(x_1^*, x_2^*)| \leq$ _____;(2) 当步长 $h \leq$ _____ 时, Euler 显式方法求解初值问题 $\begin{cases} y' + 20y = 0, & x > 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

是绝对稳定的;

(3) 设 $f(x)$ 是 n 次多项式, 则差商 $f[x, 1, 2]$ 是 _____ 次多项式;(4) 设有求解线性代数方程组的迭代法: $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$, 则当矩阵 $\mathbf{B}$ 的谱半径 $\rho(\mathbf{B}) =$ _____ 时, 该迭代法对任意初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ 必有限步收敛;(5) 设 $\varphi(x) = 2 + (x-2)^3$, 则迭代格式 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 具有 _____ 阶局部收敛性;(6) 把向量 $(0, 1)^T$ 变换为 $(1, 0)^T$ 的反射矩阵是 $\mathbf{H} =$ _____.2. (12 分) 设有函数 $y = f(x)$ 的如下数据:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	0	0	0
1	1	1	

试求满足插值条件 $\begin{cases} p(0) = f(0), & p(1) = f(1) \\ p'(0) = f'(0), & p'(1) = f'(1) \\ p''(0) = f''(0) \end{cases}$ 的插值多项式 $p(x)$.

3. (14 分) 设有常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y^2, & x > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

西北工业大学

2008 年博士研究生第二次招生考试试题

试题名称: 应用数学专业综合一

共 2 页 第 2 页

- (1) 写出求解该初值问题数值解的二阶 Taylor 展开法的计算格式;
 (2) 取步长 $h=0.1$, 用 (1) 中给出的格式求出解函数 $y(x)$ 在 $x=0.2$ 处的近似值 (小数点后至少保留四位).

4. (14 分) 已知 $x_0 = \frac{1}{4}, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$.

- (1) 试建立求积分 $\int_0^1 f(x)dx$ 的以以上三点为求积节点的插值型求积公式;
 (2) 判断该求积公式的代数精确度;
 (3) 用所建立的求积公式计算 $\int_0^1 e^x dx$ (小数点后至少取四位).

5. (14 分) 在二次多项式集合 P^2 中求一个二次多项式 $p_2(x)$, 使该函数曲线按最小二乘原理拟合于如下给定的平面点

$$(1, 2.9989), (1.5, 4.9889), (2, 8.0001), (2.5, 12.0005)$$

要求使用正交基求解, 并求拟合误差 δ^2 (小数点后至少保留四位):

6. (14 分) 设 $x = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$, 试写出求 x 的迭代方法, 讨论该方法的收敛性, 并

求 x 的值,

7. (14 分) 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[-\infty, +\infty]$ 上有唯一的不动点 α , 且 $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ (q 为常数), 试证: 迭代法 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 产生的序列 $\{x_n\}$ 一定收敛到 α , 且有误差估计

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|$$