

# 昆明理工大学 2007 年硕士研究生招生入学考试试题(A 卷)

考试科目代码： 803

考试科目名称： 高等代数

试题适用招生专业： 计算数学、应用数学、系统理论、系统分析与集成

## 考生答题须知

- 所有题目（包括填空、选择、图表等类型题目）答题答案必须做在考点发给的答题纸上，做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
- 评卷时不评阅本试题册，答题如有做在本试题册上而影响成绩的，后果由考生自己负责。
- 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答（画图可用铅笔），用其它笔答题不给分。
- 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

### 一. 计算行列式 (18 分)

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

### 二. 设 $x_1, x_2, x_3$ 是方程 $5x^3 - 6x^2 + 7x - 8 = 0$ 的三个根,计算 (12 分)

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

### 三. 证明: $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ ( $p$ 是素数) 在有理数域上不可约. (15 分)

四. 证明: 方程组  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ , 对于任意  $b_1, b_2, \dots, b_n$  都有解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (15 \text{ 分})$$

### 五. 设 $A, B$ 是 $n$ 阶方阵, 证明: (18 分)

$$1. AB - BA \neq E; \quad 2. |A^*| = |A|^{n-1}; \quad 3. \text{rank}(A^n) = \text{rank}(A^{n+1}).$$

六. 设  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , 求解矩阵方程  $AX = A + 2X$ . (17 分)

七. 设  $V_1, V_2, \dots, V_s$  是线性空间  $V$  的  $s$  个非平凡子空间, 证明:  $V$  中至少有一个向量  $\alpha$  不属于  $V_1, V_2, \dots, V_s$  中任何一个. (10 分)

八. 设  $n$  阶方阵  $A$  的特征根是  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $f(x)$  是一个多项式, 证明:  $f(A)$  的特征根是  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ . (15 分)

九. 设  $A$  是方阵, 且  $A^m = 0$ , 证明:  $|A + E| = 1$ . (10 分)

十. 设  $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$ , 用正交线性变换把  $f$  化为标准形. (20 分)