

昆明理工大学 2007 年硕士研究生招生入学考试试题(A 卷)

考试科目代码: 604

考试科目名称: 数学分析

试题适用招生专业: 计算数学、应用数学、系统理论、系统分析与集成

考生答题须知

1. 所有题目(包括填空、选择、图表等类型题目)答题答案必须做在考点发给的答题纸上,做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册,答题如有做在本试题册上而影响成绩的,后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答(画图可用铅笔),用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

1、试证: (a, b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续的充要条件是 $f(a+0), f(b-0)$ 均存在。

(12 分)

2、设 $y = \arctan x$, 试证

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$$

并求 $y^{(n)}(0)$ 。(12 分)

3、设 $f''(x) > 0$, 试用 Lagrange 中值定理证明:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

其中 $x_1 \neq x_2$ 。(12 分)

4、设 $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, 其中 $f(u)$ 连续, $f(0) = 0$ 且 $f'(0)$ 存在, 试研究 $F'(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。(12 分)

5、设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 试证: 必存在 $\xi \in [a, b]$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad (12 \text{ 分})$$

6、设 $L(s) = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx (s > 0)$, 试证 $L(s)$ 可导, 并求 $L'(s)$ 的积分表达式。(12 分)

昆明理工大学 2007 年硕士研究生招生入学考试试题

7、试证:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但非绝对收敛; (8 分)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对收敛, 但非一致收敛。(8 分)

8、将 $f(x) = x(0 \leq x \leq \pi)$ 展成周期为 2π 的余弦级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。(12 分)

9、设
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

试研究 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、可导性及可微性。(14 分)

10、求曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上第一卦限的点, 使其切平面与三坐标面所围体积最小。(12 分)

11、计算 $\int_L \ln r(xdx + ydy)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, L 为不过原点的正向简单闭曲线。(12 分)

12、求 $\iint_{\Sigma} (f+x)dydz + (2f+y)dzdx + (f+z)dxdy$, 其中 $f = f(x, y, z)$ 连续, Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第一卦限的部分取上侧。(12 分)