昆明理工大学2009年硕士研究生招生入学考试试题(A卷)

考试科目代码：837

考试科目名称 ：高等代数

试题适用招生专业 ：计算数学,应用数学,系统理论,系统分析与集成

考生答题须知

1. 所有题目（包括填空、选择、图表等类型题目）答题答案必须做在考点发给的答题纸上，做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册，答题如有做在本试题册上而影响成绩的，后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答（画图可用铅笔），用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

1．求 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$． (15 分)

2．证明: $x^d-1 \mid x^n-1$,当且仅当 $d \mid n$ ..(15 分)

3．证明:方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$,对于任意 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有解的充分必要条件是

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ ． (10 分)

4．设矩阵 A 满足 $A^2+2A-3E=0$．证明：A 可逆，求 A^{-1}． (10 分)

5．设 A,B 是 n 阶方阵满足 $AB=0$．证明: $r(A)+r(B)\le n$． (10 分)

6．设 A 是数域 P 上的 n 阶矩阵，令 $W_1=\{X\in P^n | (A-E)X=0\}$，$W_2=\{X\in P^n | (A+E)X=0\}$．证明 $P^n=W_1\oplus W_2$ 的充要条件是 $A^2=E$． (20 分)

7．在 $P^{2\times 2}$ 中定义线性变换：$T(X)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$．求 T 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

(20 分)

8．设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{100}． (20 分)

9．设$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，求若当标准形.　　(10 分)

10．设$A\in R^{n\times n}$，且$|A|\neq 0$，证明 A 可以分解成$A=QT$，其中 Q 是正交矩阵，T 是正对角线上三角矩阵，并证明分解唯一.　(20 分)