

昆明理工大学 2010 年硕士研究生招生入学考试试题(A 卷)

考试科目代码: 360

考试科目名称: 高等数学

试题适用招生专业: 070503 地图学与地理信息系统、077501 环境科学、

077402 计算机软件与理论

考生答题须知

1. 所有题目(包括填空、选择、图表等类型题目)答题答案必须做在考点发给的答题纸上,做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册,答题如有做在本试题册上而影响成绩的,后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答(画图可用铅笔),用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

一、填空题:1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} =$ _____

(2) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+ax^2} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ _____

(3) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cot x - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 连续,则 $a =$ _____

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 所确定,则 $y''(0) =$ _____

(5) 已知 $\arcsin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则 $\int \frac{x}{f(x)} dx =$ _____

(6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx =$ _____

(7) 微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解为 _____

(8) 设方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 确定函数 $z = z(x, y)$, 则 $\left. \frac{dz}{dx} \right|_{(1,0,-1)} =$ _____

(9) 积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$ 的值等于 _____

(10) 设曲面 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 则 $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy =$ _____

二、解答题: 11~21 小题, 共 110 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(11) (本题满分 6 分)

求 $y = \sin^2 x$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}$.

(12) (本题满分 10 分)

$$f(x) = \begin{cases} \sin ax, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x \ln(1+4t) dt, & x > 0 \end{cases}$$

设 $f(x)$ 如上, (a 为常数).

(I) 讨论 a 为何值时, $f(x)$ 为可导函数;

(II) 在 $f(x)$ 可导时, 求导函数.

(13) (本题满分 14 分)

已知函数 $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, 求

(I) 函数的增减区间和极值;

(II) 函数图形的凹凸区间和拐点;

(III) 函数图形的渐进线.

(14) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, $f(1) = 0$. 试证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

(15) (本题满分 8 分)

$$\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx$$

求不定积分

(16) (本题满分 10 分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ 计算 } \int_{-1}^{+\infty} x e^{-x^2-2x} dx$$

已知

(17) (本题满分 10 分)

设抛物线 $y = a(x-1)(x-3)$ 与两坐标轴围成的区域为 S_1 , 与 x 轴围成的区域为 S_2 .

(I) 证明 S_1 的面积 A_1 等于 S_2 的面积 A_2 ;

(II) 求 S_2 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V .

(18) (本题满分 10 分)

求微分方程 $(x^2-1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

(19) (本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$ 的收敛区间及和函数.

(20) (本题满分 10 分)

设 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数, $z = x^3 f(xy, \frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(21) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, 其中 D 是由曲线 $y = -1 + \sqrt{1 - x^2}$ 及 $y = -x$ 围成的区域.