

## 昆明理工大学 2011 年硕士研究生招生入学考试试题 (A 卷)

考试科目代码: 833 考试科目名称: 高等代数

试题适用招生专业: 070102 计算数学、070104 应用数学、071101 系统理论、071102

### 系统分析与集成

#### 考生答题须知

1. 所有题目(包括填空、选择、图表等类型题目)答题答案必须做在考点发给的答题纸上,做在本试题册上无效。请考生务必在答题纸上写清题号。
2. 评卷时不评阅本试题册,答题如有做在本试题册上而影响成绩的,后果由考生自己负责。
3. 答题时一律使用蓝、黑色墨水笔或圆珠笔作答(画图可用铅笔),用其它笔答题不给分。
4. 答题时不准使用涂改液等具有明显标记的涂改用品。

1. 设  $f(x)$  是一个多项式,对任意数  $a, b$  有  $f(a+b) = f(a) + f(b)$ . 证明:  $f(x) = kx$  ( $k$  是常数)(10 分)

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & x & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & x \end{vmatrix}.$$

2. 设 求  $f(x)$  的根。(15 分)

3. 设向量  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表示。证明: 表示法唯一的充要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关。(15 分)

4. 设  $A$  是实  $n$  阶方阵, 证明:  $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$ . (20 分)

5. 计算  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  的逆矩阵。(20 分)

6.  $t$  取什么值时,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  是正定二次型。(10 分)

7. 已知  $1, x, x^2, x^3$  是  $P[x]_4$  的一组基。

(1) 证明:  $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3$  也是  $P[x]_4$  的一组基;

(2) 求由基  $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3$  到基  $1, x, x^2, x^3$  的过渡矩阵。(20 分)

8. 设  $A$  是 2 阶方阵, 其特征多项式为  $\varphi(x) = x^2 - 10x + 21$ .

(1) 证明:  $A$  是可逆矩阵;

(2) 求  $A^{-1}$  的特征多项式. (10 分)

9. 设  $V$  为  $n$  维欧氏空间,  $\alpha \in V, |\alpha| = 1$ . 证明:

(1)  $V_1 = \{x \in V \mid \text{内积}(x, \alpha) = 0\}$  是  $V$  的一个子空间;

(2)  $\dim(V_1) = n - 1$ . (10 分)

10. 求正交矩阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  为对角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20 \text{ 分})$$