云南大学 2003 年硕士研究生入学考试试题

专业：基础数学、计算数学、系统分析与集成　　考试科目：《数学分析与高等代数》

一、（15 分）设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\tan x}{x}=1$, 又 $F(x)=\int_0^1 f(tx)dt$. ⑴ 求 $F'(x)$;⑵ 讨论$F'(x)$的连续性。

二、（15 分）设 $f(x)$ 在[a,b](a>0)上连续，在（a，b）内可微，且 $f'(x)\neq 0$,试证：存在点ξ，η，$\zeta\in$（a，b），使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\zeta)}=\frac{\eta}{\xi}$$

三、（20 分）设$u=x-2\sqrt{y}, y=x+2\sqrt{y}$,以u，v 为新的自变量，变换方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}(y>0)$, 并求解该方程。

四、（15 分）设 f(x)在 x=0 点的某个领域内具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,求证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛。

五、（15 分）计算积分

$$I=\iint\frac{(x^3+R)dydz+(y^3+2R)dzdx+(z^3+3R)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 s 是上半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$的下侧。

六、（20 分）设$A=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -4 & 5\end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值，特征向量。

（2）试求使$C^{-1}AC$为对角矩阵的C，求A^{2n}（n为正整数）。

七、（20 分）设A，B，C，D$\in P^{n\times n}$，若$\mathcal{A}$：$X\to AXB+CX+XD$，$\forall X\in P^{n\times n}$，证明：⑴ $\mathcal{A}$为$P^{n\times n}$的线性变换,。（2）当$C=D=0$时，A，B可逆$\Rightarrow\mathcal{A}$可逆。

八、（20 分）已知：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$，求一正交矩阵 T，使 $T'AT$ 成对角形。

九、（10 分）证明：n 维欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的。