2004年云南大学硕士研究生入学考试试题

专业：基础数学、计算数学、应用数学、运筹学与控制论　　考试科目：《高等代数A卷》

一、（20分）令 S 是一些 n 阶方阵组成的集合，关于任意 $A,B\in S, AB\in S$，且 $(AB)^3=BA$．证明 $(\forall A, B\in S)\ AB=BA$．

二、（20分）设 $f(x),g(x),h(x),k(x)$ 为实序数多项式，它们适合下列关系：

$$\begin{aligned}(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x-2)g(x)=0\\(x^2+1)k(x)+(x-1)f(x)+(x+2)g(x)=0\end{aligned}$$

．证明：$f(x),g(x)$ 都能被 x^2+1 整除．

三、（20分）计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \Lambda & \Lambda & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \Lambda & \Lambda & (a-n)^{n-1} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a & (a-1)^1 & \Lambda & \Lambda & a-n \\ 1 & 1 & \Lambda & \Lambda & 1 \end{vmatrix}$$

四、（30分）解线性方程组：$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$．

五、（30分）令 V 为数域 P 上一 n 维线性空间，A 是 V 上的线性变换，且在 P 中有 n 个不同的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\Lambda,\lambda_n,\alpha\in V$．证明：$\alpha$，$A\alpha$，$A^2\alpha,\Lambda$，$A^{n-1}\alpha$ 线性无关的充分必要条件是 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，其中 α_i 是 A 相应于 λ_i 的特征向量，$i=1,2,\Lambda$，n.

六、（20分）设 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3+4x_1x_4+2x_2x_3$，试分别在实数域上和复数域上把它化为规范型，并写出相应的可逆线性变换.

七、（10分）设 A 为半正定矩阵，证明：对任意正实数 ε，$\varepsilon E+A$ 为正定矩阵.