中国科学院研究生院
2007 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（乙）

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、填空题 (本题满分 30 分，每个空格 6 分。请将你的答案标清题号写在考场发的答题纸上，直接填在试题空格内无效。)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{\sin 2x\cdot(x^2+3x)}=$（　　　　　　）。

2. 设 $y=y(x)$ 是由 $x-\int_1^{y+x}e^{-t^2}dt=0$ 所确定的函数，$y(0)=1$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$（　　　　　　）。

3. 设 $\varphi(u,v,w)$ 有一阶连续偏导数，$z=z(x,y)$ 是由 $\varphi(bz-cy,cx-az,ay-bx)=0$ 确定的函数，则 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=$（　　　　　　）。

4. 已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内可展成泰勒级数，且 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}$，$n=1,2,\cdots$，则 $f''(0)=$（　　　　　　）。

5. 微分方程 $3e^x\tan y\,dx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$ 的通解是（　　　　　　）。

二、选择题 (本题满分 30 分，每小题 6 分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ a, & x\ge 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}b, & x<0\\ x+3, & x\ge 0\end{cases}$，$f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 a,b 的值为 ________________ 。

A． $a=1,b=2$　　B． $a=-1,b=2$　　C． $a=2,b=3$　　D． $a=-2,b=3$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 处二阶可导，且 $f(x_0)=g(x_0)=0,\ f'(x_0)\cdot g'(x_0)>0$，则 ____________。

A. x_0不是$f(x)\cdot g(x)$的驻点

B. x_0是$f(x)\cdot g(x)$的驻点，但不是$f(x)\cdot g(x)$的极值点

C. x_0是$f(x)\cdot g(x)$的驻点，且是它的极小值点

D. x_0是$f(x)\cdot g(x)$的驻点，且是它的极大值点

3. 若曲线$y=ax^2$与曲线$y=\ln x$相切，则$a=$_______________。

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2e}$　　C. e　　D. $2e$

4. 设$y = f(x)$在点x处的改变量$\Delta y=\dfrac{x\Delta x}{\sqrt{1+x^2}}+o(\Delta x)$，其中$o(\Delta x)$是当$\Delta x\to 0$时比$\Delta x$高阶的无穷小量，$f(0)=1$，则$f(2)=$ _______________。

A．2　　B. $\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

5. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n4^n}x^{2n-1}$的收敛半径$r$和收敛域是：________________

A. $r=1$，收敛域为$[-1,1]$。　　B. $r=1$，收敛域为$(-1,1)$。

C. $r=2$，收敛域为$(-2,2)$。　　D. $r=2$，收敛域为$[-2,2]$。

三、 **(**本题满分 10 分) 求平行于平面$x+y+z=9$且与球面$x^2+y^2+z^2=4$相切的平面方程。

四、**(**本题满分 10 分) 已知$f(x)$的一个原函数是$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求$\int xf'(x)dx$。

五. **(**本题满分 10 分) 计算$I=\oint_L \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$，其中$L$是正方形边界$|x|+|y|=1$的逆时针方向。

六、**(**本题满分 10 分)设$f(x,y,z)$是可微函数，且对任意实数$t>0$>0，有$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$。证明：$f(x,y,z)$满足$x f_x'+y f_y'+z f_z'=k f(x,y,z)$。

七、(本题满分 10 分) 解微分方程$y'\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$。

八、**(**本题满分 10 分) 设抛物线$y=ax^2+2bx+c$通过原点，且当$0\le x\le 1$时$y\ge 0$。如果它与x轴、直线$x=1$所围成图形的面积为$\dfrac{1}{3}$，试确定a,b,c，使得这个图形绕x轴旋转所成的立体体积最小。

九、**(**本题满分 10 分) 设$1<a<b$，$f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$，求证$0<f(b)-f(a)\le\dfrac{1}{4}(b-a)$。

十、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 具有连续二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，试求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$。

十一、(本题满分 10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛半径及和函数。