2000-7

（试题附在考卷内交回）

成 都 理 工 学 院

2000年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学(二)

（试题共 2 页）

试题适用专业：

一、填空题（本题共5小题，每小题3分，满分15分。把答案填在题中的横线上。）

1. 若 $y=f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 0 \\ x^3, & x<0, \end{cases}$ 则 $f(-x)=\begin{cases} -x^3 & x>0 \\ x^2+1 & x\leq 0 \end{cases}$。

2. 当 $x\to 0$ 时，若 $x-x\cos x$ 与 $\sin(ax^3)$ 等价，则 $a=$ $\frac{1}{2}$。

$\frac{x-x\cos x}{\sin(ax^3)}=\frac{x(1-\cos x)}{\sin(ax^3)}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{ax^3}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$

3. 已知 $y=\int_x^{x^2}f(t)dt$，则 $dy=2xf(x^2)dx-f(x)dx$。

$y'=\frac{dy}{dx}=2xf(x^2)-f(x)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$，

$\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$

$(|x|<1)$。

5. 已知曲线 $y=f(x)$ 过原点且其上任一点 (x,y) 处的切线的斜率为 $2x(y+1)$，则此曲线方程为 $y=e^{x^2}-1$。

$f(0)=0$

$y'=2x(y+1)$

二、选择题（本题共5小题，每小题3分，满分15分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在题后的括号内。）

1. 设 $y=(x+1)^n$，则当 $k>n$ 时，$(n,k\in N)$，$y^{(k)}$ 等于

(A) $n!$；(B) n；(C) 0；(D) 1。 (　　)

2. $x=1$ 是 $f(x)=\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ 的

(A) 第一类可去间断点；(B) 第一类不可去间断点；

(C) 第二类间断点；(D) 连续点。 (　　)

3. 函数 $y=f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=e^{t^2}\end{cases}$，则 $f''(2)$ 等于

(A) $\frac{7}{72}e^4$；(B) $\frac{1}{2}e^4$；(C) $\frac{2}{9}e$；(D) $\frac{9}{2}e$。 (　　)

4. 方程 $(x^2+y^2)dx-xydy=0$ 的通解是 全微分？

(A) $y^2=\ln x^2+C$；　(B) $y^2=x^2(C+\ln x^2)$；

(C) $x^2=y^2(C+\ln x^2)$；(D) $y^2=x^2\ln y^2$。（C为任意常数）

(　　)

5. 若 $f'(x)\equiv g'(x)$，则 $\Rightarrow f(x)-g(x)=C$

(A) $f(x)\equiv g(x)$；　(B) $\int f'(x)dx=\int g'(x)dx+C$

(C) $\int df(x)=\int dg(x)$；(D) $(\int f(x)dx)'=(\int g(x)dx)'$。

（C为任意常数）

D. $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^2$ (x)

$\frac{dy}{dt}=2$ $\frac{dx}{dt}=$ $y''=$ $x=2=$ $t=$

三、(本题共3小题，每小题7分，满分21分)

1. 计标 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^x+9^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[9^x(1+\frac{1}{3^x})^{3^x\cdot\frac{1}{3^x}}\right]^{\frac{1}{x}}=9\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{3^x}\cdot\frac{1}{x}}$

$=9e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x}\cdot\frac{1}{x}}=9e^0=9$

2. $y=x+x^x+x^{x^x}$，求 y'。

3. 设 $f(x)=(x^{2000}-1)g(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=1$，求 $f'(1)$。

四、求积分(本题共2小题，每小题7分，满分14分)

1. $\int(\frac{\ln x}{x})^2dx$，

2. $\int_{-1}^{1}[\frac{d}{dx}(\mathrm{arctg}\frac{1}{x})]dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}dx-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$

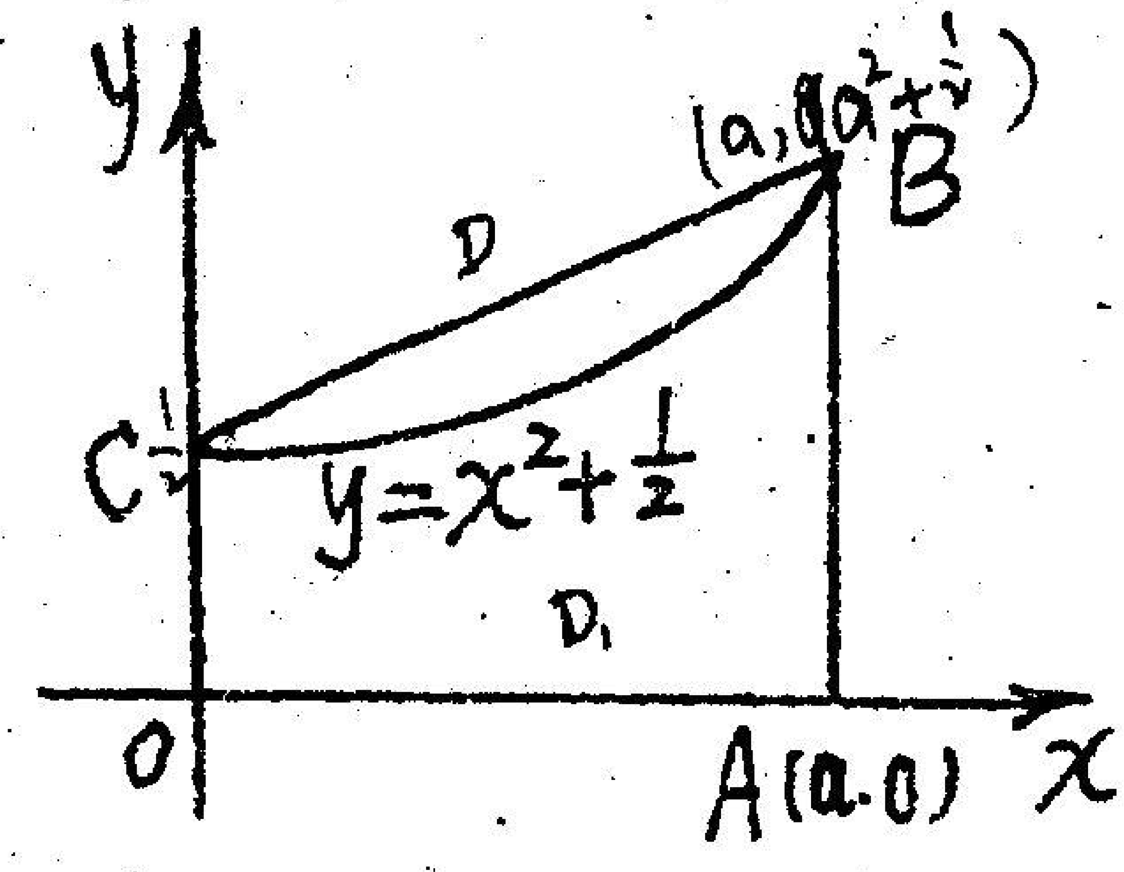
$=1-(-1)-\arctan\Big|_{-1}^{1}$

$=2-[\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})]=2-\frac{\pi}{2}$

五、(本题满分8分)

如图。设曲线方程为 $y=x^2+\frac{1}{2}$，梯形OABC面积为D，曲边梯形OABC的面积为 D_1，点A的坐标为 $(a,0)$，$a>0$。

证明：$\frac{D}{D_1}<\frac{3}{2}$。



六、(本题满分8分)

设 $b>a>e$，证明：$a^b>b^a$。

~~设f(x)=~~ 证明 $a^b>b^a$ 即需证明 $b\ln a-a\ln b>0$

设 ~~$f(x)=b\ln a-a\ln x\ (x>a)$ $f'(x)=\frac{b}{x}\ln b$~~ $f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}$

∵ $a>e$ ∴ $f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0$ $f(a)=0$ 且 $f(x)$ 单调递增，则 $f(x)>0$.

将 $x=b$ 代入 $f(x)$ 则有 $b\ln a-a\ln b>0$

七、（本题满分9分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{x}, & 1<x\le 2,\end{cases}$

(1) 证明 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上满足拉格朗日中值定理；

(2) 求出在 $(0,2)$ 内适合 $\dfrac{f(2)-f(0)}{2}=f'(\xi)$ 的所有 ξ。

八、（本题满分5分）

求满足方程

$$\int_0^x f(t)\,dt = x+\int_0^x t f(x-t)\,dt$$

的可微函数 $f(x)$。

$\int_0^x f(t)dt = x+\int_0^x t f(x-t)dt \xlongequal{x-t=u} x+\int_0^x (x-u)f(u)du$

$\int_0^x f(t)dt = x+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x u f(u)du$

两边对 x 求导 $f(x)=1+\cancel{f(x)x}+\int_0^x f(u)du-\cancel{xf(x)}$

$f(x)=1+\int_0^x f(u)du$

两边再次对 x 求导得

$f'(x)=f(x)$

则 $f(x)=e^x$

九、（本题满分5分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且满足 $f(a)=0$，若 $f'(x)$ 单调递增，则 $\varphi(x)=f(x)/(x-a)$ 在 (a,b) 内单调递增。