2002-4

（试题附在考卷内交回）

# 成 都 理 工 大 学

## 二〇〇二年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学(二)

试题适用专业：　　　　　　　　　　　　（试题共 3 页）

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分。把答案填在题中横线上）

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & 其它\end{cases}$，$\phi(x)=2x-1$，则 $f[\phi(x)]=$

$\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \dfrac{a+1}{2}<x<\dfrac{b+1}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$。

2. $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt[h]{1-3h}=$ $e^{-3}$。

3. $y=f[\cos x]-\cos[f(x)]$，其中 $f$ 可微，则 $dy=$ $-\sin x\,f'(\cos x)dx+\sin[f(x)]f'(x)dx$

$f(x)=\frac{x}{1-x}$ $f'(\sin^2 x)=\mathrm{tg}^2 x$，则 $f(x)=$ $x\tan x+\ln|\cos x|+C$ 。 $-(x+\ln|x-1|)+C$

$\int(e^{-x}-\frac{e^x}{e^{2x}+1})dx=$ 5. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x(1+e^{2x})}=$ $-e^{-x}-\arctan e^x+C$。

$-\int e^{-x}dx-\int\frac{de^x}{(e^x)^2+1}$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。把所选项前的字母填在题后的括号内）

1. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x\to x_0$ 时，无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是

(A) 高阶无穷小；　　　　(B) 低阶无穷小；

(C) 同阶但不等价无穷小；　　(D) 等价无穷小。　　（ D ）

2. 已知 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 $n\in N$，且 $n>2$ 时，$f^{(n)}(x)=$ √

(A) $n![f(x)]^{n+1}$；　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$；

(C) $[f(x)]^{2n}$；　　(D) $n![f(x)]^{2n}$。　　( A. )

?. 3. 曲线 $f(x)=\int_1^x (t+2)(t^2+1)dt$ 在点 (1. 1) 处切线方程是

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{41}{12}$　点 (1, 0)　$f'(x)=(x+2)(x^2+1)$

(A) $y-1=6(x-1)$；　　(B) $y=6x-6$；　$f'(1)=6$

(C) $y=6x$；　　(D) $y-1=6x$。　　( A. )

4. $\int_0^{\frac{3\pi}{4}}|\sin 2x|dx=$ $\overset{2x=y}{=}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}|\sin y|dy=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin y\,dy+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin y\,dy=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy=$

(A) $\frac{1}{2}$；　(B) $-\frac{1}{2}$；　(C) $\frac{3}{2}$；　(D) $-\frac{3}{2}$。　　( C )

5. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 $x$ 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则　$f''(x_0)>0$　$f''(x_0)=\frac{1-e^{-x_0}}{x_0}$　$\begin{cases} x_0>0 \\ x_0<0 \end{cases}$

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点；

(D) 上述 (A)、(B)、(C) 均不正确。　　( B )

## 三、(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\ln(1-x)]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{-1}{1-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2(x-1)}=-\frac{1}{2}$

## 四、(本题满分 10 分)

求 $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\int_1^e\frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=[\arcsin \ln x]_1^e=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}$

五、(本题满分 14 分)

设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant x_0 \\ ax+b, & x>x_0 \end{cases}$，为使 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，问 $a$、$b$ 应取何值。

可导必连续 ∴ $\lim\limits_{x\to x_0^-} x^2 = x_0^2$　$\lim\limits_{x\to x_0^+}(ax+b)=ax_0+b$　且 $x_0^2=ax_0+b$

又 $f'_-(x_0)=2x_0$　$f'_+(x_0)=a$　且 $2x_0=a$

$\Rightarrow a=$ …　$b=-$…

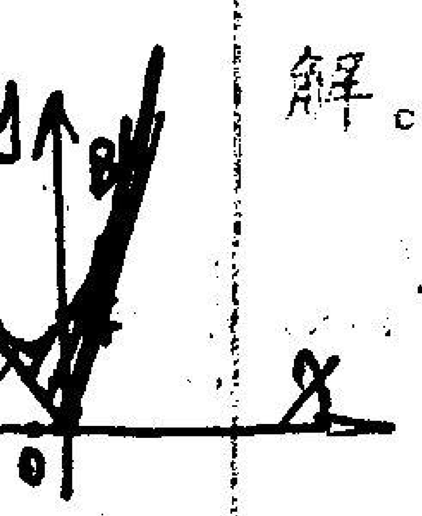
六、(本题满分 12 分)

求微分方程 $x(x^2+1)\frac{dy}{dx}+(x^2+1)y=1$ 满足条件 $y|_{x=1}=0$ 的特解。

$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x(x^2+1)}$　$y=e^{-\ln x}\left[\int\frac{e^{\ln x}}{x(x^2+1)}dx+C\right]$

$\int\frac{1}{x}dx=\ln x$　$=\frac{1}{x}\left[\int\frac{dx}{x^2+1}+C\right]=\frac{1}{x}\left[\arctan x+C\right]$

将 $y|_{x=1}=0$ 代入 得 $C=-\frac{\pi}{4}$　∴该特解为 $y=$…



七、(本题满分 10 分)

从原点 $O$ 作抛物线 $y=x^2+2x+4$ 的两条切线，设切点为 $A$、$B$，求切线 $OA$、$OB$ 与此抛物线所围平面图形的面积。

切线斜率 $y'=2x+2$

过原点，设切线 $OA$ 为 $y=k_Ax$，切线 $OB$ 为 $y=k_Bx$，分别与 $y=x^2+2x+4$…

$k_A=-2$，$k_B=6$，切点为 $A(-2,4)$，$B(2,12)$　$S=\int_{-2}^{2}(x^2+2x+4)dx-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times12$

$\frac{16}{3}$

八、(本题满分 8 分)

证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$ 在 $(0,1)$ 内必有唯一的实根。$(n=2,3,4\cdots)$

$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$　$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1$

在 $(0,1)$ 内 $f'(x)>0$，由零点定理 $f(0)=-1$，$f(1)=n-1>0$

且 $f(0)\cdot f(1)<0$，$f(x)$ 单调连续，则在 $(0,1)$ 内有且仅有唯一实根

九、(本题满分 6 分)

在 $[\frac{1}{2},1]$ 上，证明：$\mathrm{arctg}x-\ln(1+x^2)\geqslant\frac{\pi}{4}-\ln2$。

(提示：用拉格朗日中值定理)。

证明：令 $f(x)=\arctan x-\ln(1+x^2)$

由于 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，在 $(\frac{1}{2},1)$ 可导.

~~存在~~ $\exists x\in[\frac{1}{2},1]$ 则有　$f(x)$ 在 $[x,1]$ 上连续，在 $(x,1)$ 可导.

由拉格朗日中值定理得

$\exists\xi\in(x,1)$，使得

$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=\frac{\frac{\pi}{4}-\ln2-f(x)}{1-x}$

$\because f'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{1-2x}{x^2+1}\leqslant0$　$x\in[\frac{1}{2},1]$

$\therefore f'(\xi)=\frac{\frac{\pi}{4}-\ln2-f(x)}{1-x}\leqslant0$　又 $\because 1-x\geqslant0$　$\therefore\frac{\pi}{4}-\ln2-f(x)\leqslant0$