8

(试题附在考卷内交回)

成都理工大学

二〇〇三年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学（一）

试题适用专业：（试题共 3 页）

注意：（1）本卷共十二个大题，满分 150 分；

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tanx，cotx，arctanx 和 arccotx 表示；

（3）回答填空题和选择题时，可直接在题卷上完成；其余大题必须在答卷上完成，并请注明题号.

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(1-\cos t)\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+x)}=$ $\dfrac{\sin x}{2(1+\cos x)}$.

2．设微分方程 $y'=\dfrac{y}{x}+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的通解为 $y=\dfrac{x}{\ln Cx}$，（C 为任意常数），则函数 $\varphi(x)=$ $-\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

3．二次积分 $\int_1^0\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ 在极坐标系下的二次积分的表达式是 $\iint_{x^2+1}^{2-x^2}f(x^2+y^2)\,dy\,dx$.

4．设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上连续，且 $f(x+\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2n}=$________.

5．微分方程 $x\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x$ 满足 $y(1)=0$ 的特解是 $x=$________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1．设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处都取极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 x_0 处（A）

A. 必取极大值；　　B. 必取极小值；

C. 必取极值；　　D. 是否取极值不能确定.

2. 设函数 $f(x)=x(x+1)(x-1)(2x+1)(3x-1)$，则在区间 $(-1,1)$ 内方程 $f''(x)=0$ 的实根个数为（ C. ）

A. 1 个；　　B. 2 个；　　C. 3 个；　　D. 4 个.

3. 设 $I_1=\int_{-1}^{1}x\sin x\mathrm{d}x$, $I_2=\int_{0}^{1}x\sin x\mathrm{d}x$, $I_3=\int_{-1}^{1}x\cos x\mathrm{d}x$，则（ B. ）

A. $I_1>I_2>I_3$；　B. $I_2>I_3>I_1$；　C. $I_1>I_3>I_2$；　D. $I_3>I_2>I_1$.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k}{n^2}+u_n^2\right)$（ C ）

A. 必绝对收敛；B. 必条件收敛；

C. 必发散；　　D. 可能收敛，也可能发散，但敛散性与 k 的取值无关.

5. 设直线 L：$\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 平面 π：$4x-2y+z-2=0$，则（ D. ）

A. 直线 L 平行于平面 π；　　B. 直线 L 垂直于平面 π；

C. 直线 L 在平面 π 上；　　D. 直线 L 与平面 π 斜交.

三、（本题满分 8 分）

求不定积分 $\int\frac{2^x}{1+2^{x+1}+4^x}\mathrm{d}x$.

四、（本题满分 10 分）

计算定积分 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+(2x)^n+x^{2n}\right]^{\frac{1}{n}}$　　$(x\geqslant0)$.

五、（本题满分 10 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=xe^x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

六、（本题满分 10 分）

已知函数 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=x^2+y^2$，试求函数 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 的表达式.

七、（本题满分 10 分）

设 $e^{x+y}-xy=1$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

八、（本题满分 12 分）

已知曲线 $y=f(x)$ 上任一点（x，y）处的切线的斜率等于 $\frac{2y}{x}$，求由曲线 $y=f(x)$ 在切点（1，1）处的切线、曲线及 y 轴所围平面图形的面积，并求此平面图形绕 y 轴旋转一周的旋转体体积.

九、（本题满分 10 分）

设在 xy 平面上，点（x，y）处的温度 $T=4x^2+9y^2$，

（1）试求在点 P（9，4）处沿方向角为 210° 的方向 $\vec{l}$ 的温度变化率（即方向导数）；

（2）在什么方向上点 P 处的温度变化率取得最大值？并求此最大值.

十、（本题满分 10 分）

设有向曲线 L 是不经过点（1，0）和（-1，0）的分段光滑的简单闭曲线的正方向，试就曲线 L 的不同情形计算曲线积分：

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(1-x)^2+y^2}+\frac{y}{(1+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}-\frac{1+x}{(1+x)^2+y^2}\right]dy$$

十一、（本题满分 10 分）

已知级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，

（1）求此级数的收敛域；

（2）证明此级数满足微分方程 $y''-y=-1$，并求级数的和函数.

十二、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间[0，1]上二阶可导，$f(0)f(1)>0, f(1)\int_0^1 f(x)dx<0$，记 $F(x)=xf(x)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $F''(\xi)=0$.