44

（此卷不得填写考号、姓名，试题附在考卷内交回）

成　都　理　工　大　学

二○○四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学（一）

试题适用专业：　　　　　　　　　　　　　　　　（试题共 4 页）

考生注意：

（1）本卷共十个大题，满分 150 分，答题时间为 180 分钟；

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$，cot$x$，arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示；

（3）回答填空题和选择题时，可直接在题卷上完成；其余大题必须在答卷上完成，并请注明题号.

一、　填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+1)-\ln(n+2)]$ =________.

2．已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 的某邻域内有定义，当 x 有增量 Δx 时，y 有增量 $\Delta y=\Delta x+(\Delta x)^2$，那么曲线 $y=f(x)$ 在点（1，0）的切线方程为________.

3．设曲线 $L:|x|+|y|=1$，那么曲线积分 $\oint_L |x|\,\mathrm{d}l=$________.

4．交换二次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序的表达式为________.

5．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，那么级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=$________.

6．在一个与世隔绝的山村，其人口增长的速度与人口的数量成正比（比例系数 $k>0$），设时刻 t（单位：年）时的人口数量为 $p(t)$，那么该山村人口增长的微分方程模型为________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1．设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，那么常数 a,b 满足的条件是(　　)

(A) $a\ge 0,b>0$；　　(B) $a<0,b\ge 0$；

(C) $a\ge 0,b<0$；　　(D) $a\ge 0,b\ge 0$．

2．方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 的实根个数为(　　)

(A) 0 个；　　(B) 1 个；　　(C) 2 个；　　(D) 3 个．

3．设函数 $f(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\cos 2x}\sin x\mathrm{d}x$，则函数 $f(x)$(　　)

(A) 为大于零的数；　　(B) 为小于零的数；

(C) 等于零；　　(D) 不为常数．

4．下列命题中，

(1)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x)\ge 0$ 且不恒等于 0，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0;$$

(2)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x;$$

(3)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，那么函数 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积；

(4)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，那么函数 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积．

是真命题的命题个数是(　　)

(A) 4 个；　　(B) 3 个；　　(C) 2 个；　　(D) 1 个．

5．设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{1}{2},\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ 其周期为 2 的余弦级数的和函数
$s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,3,\cdots$

那么 $s(\dfrac{2003}{2})=$（　　）

(A) $-\frac{1}{2}$;　　(B) $\frac{1}{2}$;　　(C) $-\frac{3}{4}$;　　(D) $\frac{3}{4}$.

6. 关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin kn}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$（$k$ 为大于零的常数）的敛散性的判断，正确的是(　　)

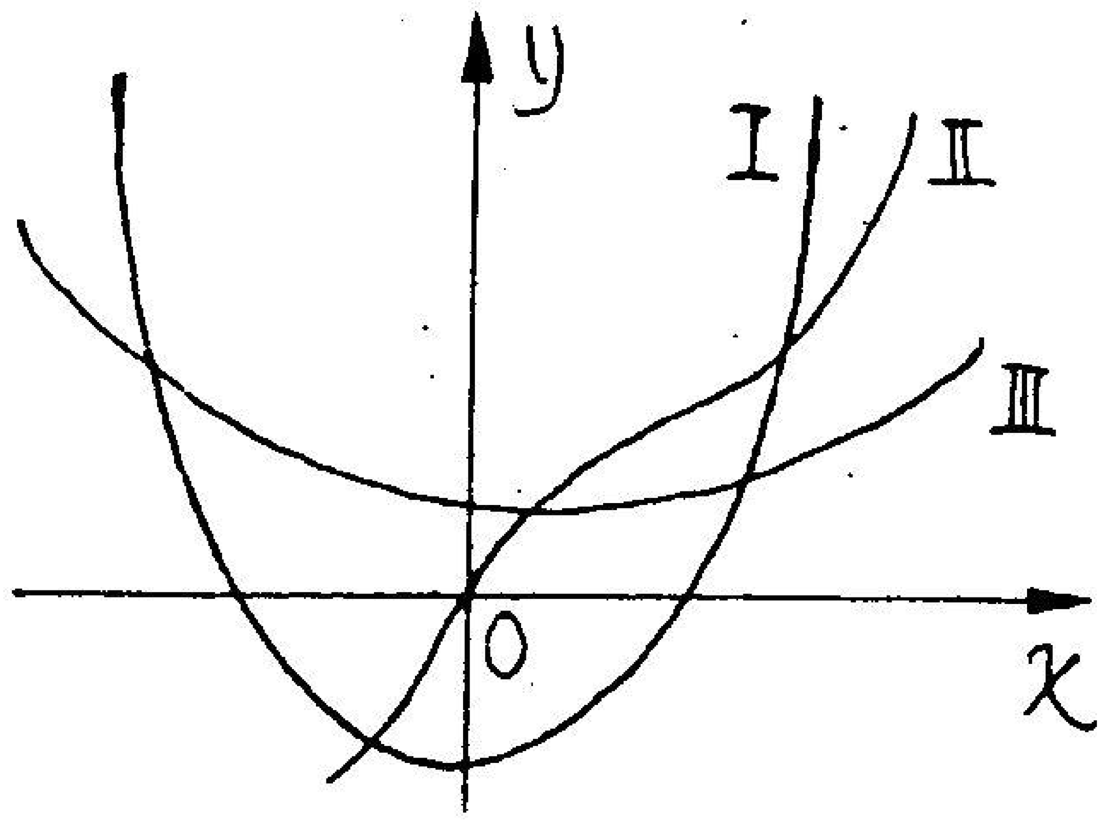
(A) 级数发散;　　(B) 级数条件收敛;

(C) 级数绝对收敛;　　(D) 级数的敛散性与 k 的取值有关.

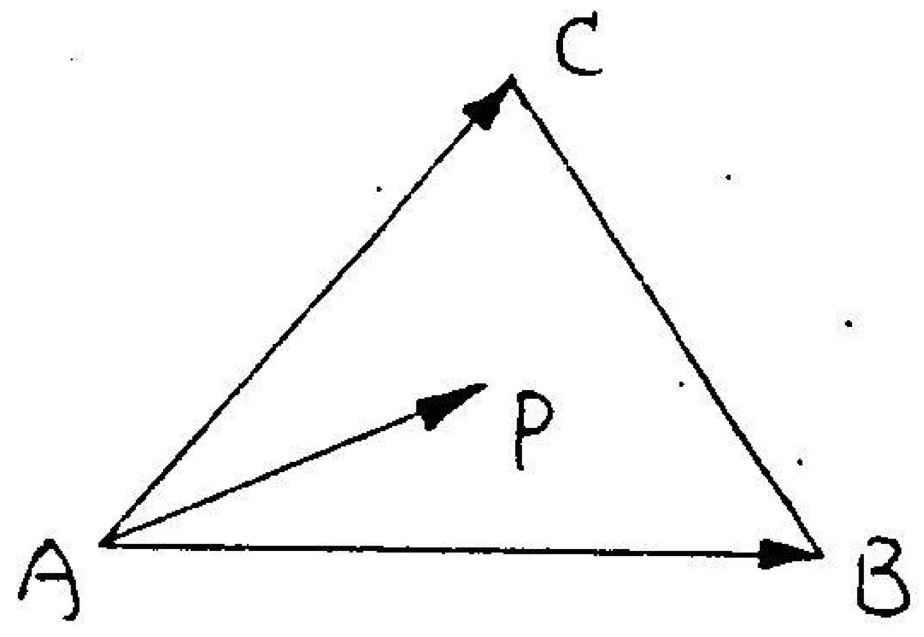
7. 设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，图中的曲线 I，II，III是函数 $y=f(x)$、$y=f'(x)$、$y=f''(x)$ 的图形中的一条，则曲线 I，II，III与函数的对应关系正确的是(　　)

(A) $f''(x)$、$f'(x)$、$f(x)$;　　(B) $f(x)$、$f'(x)$、$f''(x)$;

(C) $f''(x)$、$f(x)$、$f'(x)$;　　(D) $f'(x)$、$f(x)$、$f''(x)$.



第 7 题图



第 8 题图

8. 在 ΔABC 中，点 P 落在 ΔABC 内，并且存在正数 $\lambda>0$，使向量 $\overrightarrow{AP}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，则(　　)

(A)点 P 在 $\angle BAC$ 的角平分线上;　　(B)点 P 在 BC 的中线上;

(C)点 P 在 BC 的中垂线上;　　(D)点 P 在 BC 的垂线上.

三、(本题满分 10 分)

设微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有一个特解是 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$，求常数 a、b、c 及方程的通解.

四、(本题满分 12 分)

已知函数 $y=f(x)$ 有二阶连续的导数，$f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\int_1^x[f(t)-t]dt}{(x-1)^3(x+1)\sin x}$.

五、（本题满分 12 分）

计算定积分 $\int_{-2}^{2}\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\mathrm{d}x$.

六、（本题满分 12 分）

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1, f'_x(1,1)=2, f'_y(1,1)=3$. 设 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$. 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

七、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，A,B 为两个常数，且 $AB>0$，证明对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，都存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\dfrac{Af(x_1)+Bf(x_2)}{A+B}$.

八、（本题满分 14 分）

曲线 $L_1: y=1-x^2$ 与 x 轴所围区域被曲线 $L_2: y=ax^2 (a>0)$ 分成面积相等的两部分，求常数 a 的值.

九、（本题满分 14 分）

设曲面 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分 $(z\geq 0)$，点 $P(x,y,z)\in S$，平面 π 为曲面 S 在点 P 处的切平面，函数 $\rho(x,y,z)$ 是点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，计算曲面积分 $I=\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

十、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0$.