45

（此卷不得填写考号、姓名，试题附在考卷内交回）

成 都 理 工 大 学

二〇〇四年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目名称：高等数学（二）

试题适用专业： （试题共 4 页）

考生注意：

（1）本卷共十个大题，满分 150 分，答题时间为 180 分钟；

（2）根据国家标准，试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 tan$x$，cot$x$，arctan$x$ 和 arccot$x$ 表示；

（3）回答填空题和选择题时，可直接在题卷上完成；其余大题必须在答卷上完成，并请注明题号。

一、 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0, 1)$，那么函数 $y=f(\sin x)$ 的定义域是____.

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+1)-\ln(n+2)] =$__________.

3．已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 的某邻域内有定义，当 x 有增量 Δx 时，y 有增量 $\Delta y=\Delta x+(\Delta x)^2$，那么曲线 $y=f(x)$ 在点（1，0）的切线方程为____________.

4．函数 $y=x^2$ 在区间 $[0, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值 $\xi=$__________.

5．已知 $f'(\ln x)=\dfrac{1}{x}$，那么 $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=$__________________.

6．在一个与世隔绝的山村，其人口增长的速度与人口的数量成正比（比例系数 $k>0$），设时刻 t（单位：年）时的人口数量为 $p(t)$，那么该山村人口增长的微分方程模型为________________________________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1. 下列等式成立的是(　　)

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^x=1$；　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^x=e$；

(C) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^x=1$；　　(D) $\lim\limits_{x\to \infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=0$，那么常数 a,b 满足的条件是(　　)

(A) $a\ge 0,b>0$；　　(B) $a<0,b\ge 0$；

(C) $a\ge 0,b<0$；　　(D) $a\ge 0,b\ge 0$.

3. 在区间（0，1）内，下列函数为减函数的是(　　)

(A) $f(x)=x+\ln x$；　　(B) $f(x)=e^{(x-\frac{1}{2})^2}$；

(C) $f(x)=x^2-2x-5$；　　(D) $f(x)=2x+3\sin x$.

4. 方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 的实根个数为（　　）

(A) 0 个；　　(B) 1 个；　　(C) 2 个；　　(D) 3 个.

5. 设函数 $f(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\cos 2x}\sin x\mathrm{d}x$，则函数 $f(x)$（　　）

(A) 为大于零的数；　　(B) 为小于零的数；

(C) 等于零；　　(D) 不为常数.

6. 设函数 $f(x)=\int_0^x t(t-1)^2\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 的极值点的个数是（　　）

(A) 0 个；　　(B) 1 个；　　(C) 2 个；　　(D) 3 个.

7. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上满足 $f''(x)<0$，则下列式子成立的是(　　)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；　　(B) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$；

(C) $f(1)-f(0)=f'(0)>f'(1)$；　　(D) $f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$.

8．下列命题中，

(1)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x)\geq 0$ 且不恒等于 0，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0;$$

(2)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x;$$

(3)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，那么函数 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积；

(4)如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积，$y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积，那么函数 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定不可积.

是真命题的命题个数是(　　)

(A) 4 个；　　(B) 3 个；　　(C) 2 个；　　(D) 1 个.

三、（本题满分 10 分）

已知函数 $y=f\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)$，$f'(x)=\mathrm{e}^{x-2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

四、（本题满分 12 分）

已知函数 $y=f(x)$ 有二阶连续导数，$f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x[f(t)-t]\mathrm{d}t}{(x-1)^3(x+1)\sin x}$.

五、（本题满分 10 分）

求解初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y},\\ y(0)=1.\end{cases}$

六、（本题满分 12 分）

计算定积分 $\int_{-2}^{2}\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\mathrm{d}x$.

七、（本题满分 14 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=\sin x-\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 表达式.

八、（本题满分 12 分）

求函数 $f(x)=x+2\cos x$ 在闭区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

九、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，A、B 为两个常数，且 $AB>0$，证明对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，都存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\dfrac{Af(x_1)+Bf(x_2)}{A+B}$.

十、（本题满分 12 分）

曲线 $L_1: y=1-x^2$ 与 x 轴所围区域被曲线 $L_2: y=ax^2\ (a>0)$ 分成面积相等的三部分，求常数 a 的值.