1998年硕士研究生入学考试试题

考试科目：线性代数

注：应届生作前7题，在职生前5题必作，(六)(七)(八)任选两题

(一)(12分) 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 & n+2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

(二)(12分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性空间 V 的一组基底，证明：

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n$ 也是 V 的一组基底。

(三)(20分) 设三阶方阵 $B\neq 0$，且 B 的每一列向量都是以下方程组的解：

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+ax_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

(1) 求 a 的值；　(2) 证明 $|B|=0$

(四)(20分) 设 $A\in R^{n\times n}$，$A^2=A$，证明：(1) $A=E$ 或 $|A|=0$；

(2) A 的特征值 $\lambda=1$ 或 0。

(五)(12分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 2 & 0 \\ 2 & 3 & c & 2 \end{pmatrix}$，问 a,b,c 取何值时，A 可对角化。

(六)(12分) 设 A 为正定实对称矩阵，证明：(1) A^{-1} 正定；

(2) 存在实矩阵 B，使 $B^3=A$。

(七)(12分)设$A\in R^{n\times n}$，证明：秩$(A)=$秩(A^TA).

(八)(12分)若n阶方阵$A\neq 0$，则存在非零向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$使$AX\neq 0$。