电 子 科 技 大 学

1998 年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注：

一、填空题（每小题3分共15分）

1) 設 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$ ______.

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x^x-a^a}=$ ______. 其中 $a>0, x>0$.

3) 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程为 ______.

4) $\int_1^e\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2dx$ 之值为 ______.

5) $\int_0^1dx\int_{x^2}^1\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$ 之值为 ______.

二、选择题（每小题3分共15分，把你認为正确的一个选项填入括号内）

1) 設 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则下面説法正确的是（　　）.

(A) 当 $0<a\le 1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导；(B) $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处有連续导数.

(C) $a>2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有任意阶导数. (D) $1<a<2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2) 設 $f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\\ y, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}.\end{cases}$ 则 $f(x)$（　　）.

(A) 在平面上处处不連续；　(B) 在点 $(a,0)$ 連续；

(C) 在点 $(a,0)$ 不連续；　(D) 在点 (a,b) 連续，(其中 $b\ne 0$)。

3) 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx\,dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 在（　　）条件下收斂.

(A) $p<1, q<1$；　(B) $p\ge 1, q\ge 1$；

(C) $p>1, q>1$；　(D) $p>0, q>0$.

4) 函数列 $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ 在(　　)上不一致收敛.(其中 $\varepsilon>0$).

(A) $0\le x\le 1-\varepsilon$;　　(B) $1-\varepsilon\le x\le 1+\varepsilon$;

(C) $1+\varepsilon\le x\le 1+2\varepsilon$;　　(D) $1+\varepsilon\le x<+\infty$.

5) 函数项级数 $\sum_1^\infty ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上(　　).

(A) 收敛且其和函数连续;　(B) 一致收敛;

(C) 发散;　　(D) 收敛但其和函数不连续.

三.(每小题5分共15分)

1) 若 $u=u(x,y)$ 为可微函数且满足 $u(x,y)\big|_{y=x^2}=1$, $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{y=x^2}=x$, 试求 $\frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=x^2}$ 之值.

2) 求 $\iint_\Sigma xz^2dzdy+yx^2dzdx+zy^2dxdy$ 之值,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

3) 求 $\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$ 之值.其中 L 为依反时针方向通过的圆周 $x^2+y^2=a^2$

四.(每小题6分,共12分)

1) 判定级数 $\sum_{n=1}^\infty n^{\ln x}$ (其中 $x>0$) 的敛散性.

2) 设 $F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt$ 其中 $f(t)$ 是连续函数,求 $\frac{d^nF(x)}{dx^n}$.

五.(6分)试用《$\varepsilon-\delta$》定义证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续.

六.(7分)证明 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 收敛 其中 $[x^2]$ 表示不超过 x^2 的最大整数.

七.(8分)求 $u=\sin x\sin y\sin z$ 在条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $(x>0,y>0,z>0)$ 下的极值.

八.(8分)研究 $\int_0^{+\infty}\sqrt{a}e^{-ax^2}dx$, $0\le a<+\infty$ 的一致收敛性.

九.(8分)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导试证 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

十.(6分)设 $S(x)=\sum_1^\infty\frac{1}{n^x}$ 试证 $S(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续,并有各阶连续导数.

—完—