电子科技大学
2002年攻读硕士学位研究生入学试题

科目名称：高等数学（理科）

试题一、（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

1. 当 $x \to -\infty$ 时，$f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}-(ax+b)$ 为无穷小量，则常数 $a=$ ________，$b=$ ________。

2. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx=$ ________。

3. 设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，$f(x,x^2)=1$，$f_x'(x,x^2)=x$；当 $x\neq 0$，则 $f_y'(x,x^2)=$ ________。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leq 1\\ 1-x, & 1<x\leq 2\end{cases}$，$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{2}x$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数，则 $S(7)=$ ________。

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有连续的二阶导数，且 $f'(a)=1, f''(a)=2$，则 $\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)}-\frac{1}{x-a}\right]=$ ________

试题二、（本题共5个小题，每小题3分，满分15分）

1. 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ （ ）

（A）绝对收敛 （B）条件收敛 （C）发散 （D）收敛性与 a 的取值有关

2. 方程 $y''-2y'+3y=e^x\sin(\sqrt{2}x)$ 的特解的形式为 （ ）

（A）$e^x[A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)]$ （B）$xe^x[A\cos(\sqrt{2}x)+B\sin(\sqrt{2}x)]$

（C）$Ae^x\sin(\sqrt{2}x)$ （D）$Ae^x\cos(\sqrt{2}x)$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域连续且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 （ ）

（A）不可导 （B）可导且 $f'(0)\neq0$ （C）有极大值 （D）有极小值

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，其中 $t>0, s>0$，则 I 的值 （ ）

（A）依赖于 s 和 t （B）依赖于 s, t, x

（C）依赖于 t, x，不依赖于 s （D）依赖于 s，不依赖于 t

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x, & x\geq0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处 （ ）

（A）极限不存在 （B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导 （D）可导且 $F'(0)=0$

试题三、（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)>0$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

2. 计算定积分 $\int_0^2 x(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$

试题四、（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 计算 $\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}R}e^{-y^2}dy\int_0^{y}e^{-x^2}dx+\int_{\frac{\sqrt2}{2}R}^{R}e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}e^{-x^2}dx$。

2. 设 $u=f(\frac{x}{y},\frac{y}{z})$，求 $\dfrac{\partial^2u}{\partial y\partial z}$。

试题五、（本题满分 7 分）

在过点 O（0，0），与 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分

$$\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$$

的值最小。

试题六、（本题满分 8 分）

求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

其中Σ为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。（$a>0$ 为常数）

试题七、（本题满分 8 分）

设连接两点 $A(0,1)$，$B(1,0)$ 的一条凸弧，$P(x,y)$ 为凸弧 AB 上的任意点，已知凸弧与弦 AP 之间的面积为 x^3，求此凸弧的方程。

试题八、（本题满分 7 分）

设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且在 $[0,2]$ 上定义为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & 1<x\le 2 \end{cases}$$

求其 Fourier 级数，并利用此结果证明等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$

试题九、（本题满分 9 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-1}{(x-\frac{1}{2})^2}=1$，试证：

（1）存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f(\eta)=\eta$；

（2）对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$

（3）$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值大于 1。

试题十、（本题满分 9 分）

计算曲线积分

$$I=\int_{AmB}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy$$

其中，AmB 为连接点 $A(\pi,2)$ 与 $B(3\pi,4)$ 的线段下方的任意曲线，该曲线与线段 AB 所围图形的面积为 2。