电子科技大学
2003 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：313　数学分析

注：应届生必做第一至十二题；往届生必做第一至十题，再在后四题中选做两题。

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$　$g(x)=e^x,-\infty<x<+\infty$，则 $f[g(x)]=$ ________；$g[f(x)]=$ ________。

2. 数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k}=k$，$x_{2k+1}=1+\frac{1}{k}$，则 $\inf\{x_n\}=$ ________；$\sup\{x_n\}=$ ________。

3．若 $a>0,b>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}})=$ ________。

4．$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=$ ________。

5．曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\vec{n}$，则函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$，在点 P 处沿方向 n 的方向导数为 ________。

6．设 $f(x,y)=(x^2-1)e^{x-xy}+(1+y-xy)\sqrt{\frac{y-1}{x}}$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(3,1)}=$ ________。

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1．$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\arctan\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有一阶连续导数，但二阶导数不存在，则参数 α 满足 ________。

A. $\alpha\le 0$　　B. $0<\alpha\le 1$　　C. $1<\alpha\le 2$　　D. $2<\alpha\le 3$

2. $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\ln(1-t^2)dt$，$g(x)=\tan x-\sin x$，则 $x\to 0^+$ 时 ______。

A. $f(x)\sim g(x)$　　　　B. $f(x)=O(g(x))$

C. $f(x)=o(g(x))$　　　　D. $g(x)=o(f(x))$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(1-x)=$______。

A. $\dfrac{1}{1-x}$　　B. $\dfrac{1}{x}$　　C. $\dfrac{x}{1-x}$　　D. $\dfrac{1-x}{x}$

4. 设 $f(xy,x+y)=x^2+y^2+xy$，则 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 为______。

A. $x+2y,\ y+2x$　　　　B. $2x+y,\ 2y+x$

C. $-1,\ 2y$　　　　D. $2x,\ -1$

5. 函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 在 $(0,0)$ 的二重极限为______。

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

6. 设曲线 $l:x=a\cos t;y=a\sin t,z=at$ （$0\le t\le 2\pi$）。第一类曲线积分 $\int_l\dfrac{z^2}{x^2+y^2}ds=$______。

A. $\dfrac{8}{3}\pi^3$　　B. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$　　C. $\dfrac{8}{3}a\pi^3$　　D. $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

三、（10 分）证明区间 (a,b) 上单调函数的一切不连续点都为第一类间断点。

四、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)e^{1-x^2}dx$，求证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$。

五、（10 分）设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(e^t)dt$，证明：$e^x|f(x)|\le 2$。

六、（10 分）叙述函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $S(x)$ 的定义，讨论 $S_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $X=[0,1]$ 上的一致收敛性。

七、（10 分）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数。

八、（10 分）求由抛物线 $y^2=px,y^2=qx(0<p<q)$ 以及双曲线 $xy=a,xy=b(0<a<b)$ 所围区域的面积。

九、（10 分）应用对参数求导法计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2x)dx$（$a>1$）（不必定常数，若计算时出现无界情况，取极限计算）。

十、（10 分）求密度为 1 的均匀圆柱体 $x^2+y^2\le a^2,|z|\le h$，对直线 $L:x=y=z$ 的转动

惯量。

以下题目应届生做第十一、十二题，往届生任选两题。

十一、（11 分）求曲线积分 $I=\int_C (x+y)dx+(3x+y)dy+zdz$，其中 C 为闭曲线 $x=a\sin^2 t$，$y=2a\sin t\cos t$，$z=a\cos^2 t$（$0\le t\le \pi$）C 的方向按 t 从 0 到 π。

十二、（11 分）计算 $I=\iint_S xyzdxdy+xzdydz+z^2dzdx$，其中 S 是 $x^2+z^2=a^2$ 在 $x\ge 0$ 的一半被 $y=0$ 和 $y=h(h>0)$ 所截下部分的外侧。

十三、（11 分）试用两种方法证明概率积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

十四、（11 分）叙述闭区间套定理和闭区间上连续函数的有界性定理，并用闭区间套定理证明有界性定理。