电子科技大学

2003年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：314高等数学

一、填空题（本题满分24分，每小题4分）

（1）设 y 是由方程 $y=1+xe^y$ 确定的函数 $y=y(x)$，则 $dy|_{x=0}=$ ________.

（2）设 $\varphi(x)=\max(x,x^2),\ 0<x<2$，则 $\varphi'(x)=$ ________.

（3）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=$ ________.

（4）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^4+5x^2+4}=$ ________.

（5）微分方程 $y''-2y'=e^{2x}$ 的通解为 $y=$ ________.

（6）设 n 是正整数，则 $\displaystyle\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=$ ________.

二、单项选择题（本题满分24分，每小题4分）

（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是（　）

(A) 有界的　　(B) 无界的　　(C) 无穷大　　(D) 有极限的

（2）设 $f(x)=x^3+4x^2-3x-1$，则方程 $f(x)=0$（　）

(A) 在 $(0,1)$ 内没有实根　　(B) 在 $(-1,0)$ 内没有实根

(C) 在 $(-\infty,0)$ 内有两个不同的实根　　(D) 在 $(0,+\infty)$ 内有两个不同的实根

（3）设 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)<0, f(0)=0$，则 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内（　）

(A) 单调增加　　(B) 单调减少　　(C) 有极大值　　(D) 有极小值

（4）设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t)dt, \beta(x)=x\int_0^x f(t)dt, f(x)>0$ 且 $f(x)$ 可导，则当 $x\to0^+$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　）

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但不等价的无穷小

（5）设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ -x, & x\ge 0 \end{cases}$，$g(x)=\begin{cases} 1-x, & x<0 \\ x+2, & x\ge 0 \end{cases}$，则 $g[f(x)]=$（　　）

(A) $\begin{cases} x^2+2, & x\ge 0 \\ 1+x, & x<0 \end{cases}$　　(B) $\begin{cases} x^2+2, & x>0 \\ 1+x, & x\le 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x^2+2, & x<0 \\ 1+x, & x\ge 0 \end{cases}$　　(D) $\begin{cases} x^2+2, & x\le 0 \\ 1+x, & x>0 \end{cases}$

（6）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$，且 $\int_0^2 f(x)dx=a$，则 $a=$（　　）

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) -1

三、（本题满分 8 分）

设 $z=yf(2x,\dfrac{y}{x})$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、（本题满分 9 分）

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\,dxdydz$，其中 Ω: $x^2+y^2\le 1$, $|z|\le 1$.

五、（本题满分 9 分）

设 $f(t)$ 为连续函数，区域 $D:|x|\le\dfrac{A}{2}, |y|\le\dfrac{A}{2}$（$A$ 为正常数）

试证：$\iint\limits_{D} f(x-y)\,dxdy=\int_{-A}^{A} f(t)(A-|t|)\,dt$

六、（本题满分 12 分）

计算 $\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 Σ 为任一不经过原点的封闭曲面的外侧.

七、（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，又设曲线积分

$$\int_C [xe^{2x}-6f(x)]\sin y dx-[5f(x)-f'(x)]\cos y dy$$

与路径无关，求 $f(x)$.

八、（本题满分 9 分）

设 $f(x)$、$g(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\cdot\int_{\xi}^{b} g(x)dx=g(\xi)\cdot\int_a^{\xi} f(x)dx$$

九、(本题满分 9 分)

设 $f(x)=\int_{-1}^{x} t|t|\,dt \quad (x\geq 1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积.

十、(本题满分 12 分)

求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ 的和.

十一、(本题满分 11 分)

设密度为 1 的立体 Ω 是由 xoz 平面上的区域 $D: x^2\leq z\leq 1, 0\leq x\leq 1$ 绕 z 轴旋转所成的旋转体，试求 Ω 绕直线 $L: x=y=z$ 的转动惯量.

十二、(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 以 2π 为周期的连续函数，且其 Fourier 系数 $a_0, a_n, b_n \quad (n=1,2,\cdots)$，

求函数 $C(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,dt$ 的 Fourier 系数 $A_0, A_n, B_n \quad (n=1,2,\cdots)$.