

2003 年应用数学学院硕士研究生复试 《复变函数》试题试卷

姓名_____考号_____考试时间_____成绩_____

一. (20 分) 设函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析. 请根据你对此条件的理解, 另给出四种与之等价的描述.

二. (20 分) 解方程 $(1+z)^5 = (1-z)^5$

三. (10 分) 设 $f(z), g(z)$ 在区域 D 内解析, 在闭区域 \bar{D} 上连续. 如果在 ∂D 上 $f(z) = g(z)$ 成立, 证明在 D 的任意点处 $f(z) = g(z)$ 成立.

四. (40 分) 计算:

1. (20 分) $\int_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-1|^2}$

2. (20 分) 求 $(1+i)^{1-i}$ 的值和主值.

五. (10 分) 有以下推理:

$$\frac{z}{1-z} = z \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}, \quad \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \text{因为 } \frac{z}{1-z} + \frac{z}{z-1} = 0,$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 0$. 你认为结论是否成立? 请说明理由.