2003 年硕士研究生复试试题

科目：常微分方程　　　复试时间:　　　姓名:

一、求解如下微分方程(每小题 10 分，共 60 分)：

1. 求 $ydx-xdy=x^2ydy$ 的通解。

2. 求 $\dfrac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$ 满足 $y(1)=0$ 的解。

3. 求 $ydx-(x+y^3)dy=0$ 的通解。

4. 求 $s''+2as'+a^2s=e^t$ 的通解，其中 a 为实常数。

5. 求 $tx''-tx'+2x=t\ln t$ 的通解。

6. 求 $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 的基解矩阵。

二、(本题共 10 分) 试导出方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

具有形如 $\mu(x+y)$ 的积分因子的充要条件。

三、(本题共 10 分) 设 $x_1(t)\neq 0$ 是二阶齐次线性微分方程

$$x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$$

的解，其中 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，试证明：$x_2(t)$ 是方程的解的充要条件是

$$W'[x_1,x_2]+a_1(t)W[x_1,x_2]=0。$$

四、(本题共 10 分) 设 $\Phi(t)$ 是方程 $x'=Ax$ (A 为 $n\times n$ 常数矩阵)的标准基解矩阵(即 $\Phi(0)=E$)，证明：对某个 $t_0\in R$，有

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)=\Phi(t-t_0)。$$

五、(本题共 10 分) 设 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 分别是非齐次线性微分方程组

$$x'=A(t)x+f_1(t) \text{ 和 } x'=A(t)x+f_2(t)$$

的解，证明 $x_1(t)+x_2(t)$ 是非齐次线性微分方程组

$$x'=A(t)x+f_1(t)+f_2(t)$$

的解。