电子科技大学

2004 年攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目：405 线性代数

(一) 判断题(共 30 分，每小题 5 分，对者打 V，错者打 X)

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$ 也线性无关。 ( )

(2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，但其中任意三个向量都线性无关，则存在一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0。$$ ( )

(3) 若 $ABx=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(AB)\le r(B)$。 ( )

(4) 若 $A=\begin{pmatrix}0 & b\\ a & 0\end{pmatrix}$ 中 $ab>0$，则 A 必可对角化。 ( )

(5) 三阶方阵 $A\neq 0$，且 $A^2=0$，则 $r(A)=1$。 ( )

(6) A 是 n 阶正定矩阵的充要条件是 $|A|>0$。 ( )

(二) 填空与选择题(共 30 分，每小题 5 分)

(1) $Ax=b$ 的三个解为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，而 $\alpha_1=(2,0,5,-1)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(1,9,8,6)^T$，且 $r(A)=2$，则 $Ax=b$ 的通解为____________________。

(2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\end{pmatrix}$，$B=(E+A)^{-1}(E-A)$，则 $(E+B)^{-1}=$__________。

(3) A 有 n 个特征值 $0,1,2,\Lambda,n-1$，且 $A\sim B$，则 $|E+B|=$__________。

(4) 线性空间 $V=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}\right\}$ 的维数和基底是____________________。其中 a,b,c 是任意常数

(5) n 阶矩阵 A 的特征值是 λ_1,λ_2，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，而 x_1,x_2 分别是对应于 λ_1,λ_2 的特征向量，要 $x=k_1x_1+k_2x_2$ 也是 A 的特征向量，则必需是____________________。

(a) $k_1=0,k_2=0;$　　(b) $k_1\neq 0,k_2\neq 0;$

(c) $k_1\neq 0,k_2=0;$　　(d) $k_1=0,k_2\neq 0;$

(6) 当 λ 满足____________________时，二次型

$$f=\lambda(x^2+y^2+z^2)+2xy-2yz+2xz+w^2$$

正定。

(a) $\lambda<2$；　　(b) $\lambda>2$；　　(c) $\lambda=2$

(三) (10 分) 求证

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \Lambda & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \Lambda & n-2 & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \Lambda & n-3 & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \Lambda & n-4 & n-3 \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ 1 & x & x & x & \Lambda & 1 & 2 \\ 1 & x & x & x & \Lambda & x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}x^{n-2}$$

(四) (10 分) 设 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n$ 线性无关，若

$$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\Lambda+k_n\alpha_n,$$

且 $k_i\neq 0$ $(i=1,2,\Lambda,n)$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\Lambda,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量都线性无关。

(五) (10 分) 若 $BAB=A^{-1}$，证明：$r(E-BA)+r(E+BA)=n$。

(六) (12 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求 $Ax=0$，$A^*x=0$，$(A^*)^*x=\mathbf{0}$ 的通解。

(七) (12 分) 设 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，求 B。

(八) (12 分) 设 A 是三阶非零矩阵且 $a_{ij} = A_{ij}$，计算 $|A|$。

(九) (12 分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量，并证明它与对角阵相似。

(十) (12 分) 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = 0$，证明：

(1) A 和 $E - A$ 均是可逆矩阵，并求 A^{-1}，$(E-A)^{-1}$；

(2) $A + E$ 和 $A - 2E$ 不可能同时都是可逆矩阵。