电子科技大学
2004 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目： 313 **数学分析**

注：应届生必做第一至十二题；往届生必做第一至十题，再在后四题中选做两题。

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x+x^2}+\tan 3x)^{\csc x}=$ __________.

2. $\int_0^2 [e^x]\,dx=$ __________.

3. $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln x}{1+x^2}dx=$ __________.

4. 设 $f(x)$ 以 4 为周期，它在 $[-2,2]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0\\ e^x, & 0<x\le 2\end{cases}$

   则 $f(x)$ 的富里埃（Fourier）级数在 $[-4,2]$ 上的和函数 $S(x)$ 的表达式为 $S(x)=$ __________.

5. 若 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线，则第一类曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)ds=$ __________.

6. 设 $\Omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=$ __________.

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1,0)\cup(0,1)$ ________.

   (A) 不连续　　(B) 处处连续，但不一致连续；

   (C) 一致连续，但导函数不一致连续　　(D) 导函数一致连续.

2. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,2)$ 处的从点 $(1,2)$ 到 $(2,2)$ 的方向导数为 2；从点 $(1,2)$ 到 $(1,1)$ 的方向导数为 -2，则函数在 $(1,2)$ 处的梯度为________.

   (A) 4;　　(B) -4;　　(C) $2i-2j$;　　(D) $2i+2j$.

4. 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为________.

   (A) $[0,+\infty)$　　(B) $(-1,1)$　　(C) $(-\infty,-1)$　　(D) $(-1,1]$.

5. 当 $x>0$ 时，$2xy(x^4+y^2)^{\lambda}dx-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}dy$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，则常数 $\lambda=$______.

(A) 1； (B) -1； (C) 2； (D) -2.

6. 设 $F(y)=\int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}dx\ (y>0)$，则 $F'(y)=$______.

(A) $\frac{\ln(1+xy)}{x}$； (B) $\frac{\ln(1+y^2)}{y}$； (C) $\frac{2\ln(1+y^2)}{y}$； (D) $\frac{\ln(1+y^2)}{y^2}$.

三、(10 分) 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\ (a>0), n=1,2,\cdots, x_1=a_0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、(10 分) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可微，且 $0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$，证明：存在 $\xi>0$，使得 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

五、(10 分) 设 $f(x)$ 定义在 $(a,b), c\in(a,b)$，又设 $H(x),G(x)$ 分别在 $(a,c],[c,b)$ 连续且在 $(a,c),(c,b)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 令 $F(x)=\begin{cases}H(x), & a<x<c\\ G(x)+C_0, & c\le x<b\end{cases}$

其中选择 C_0 使 $F(x)$ 在 $x=c$ 连续，就下列情况，回答 $F(x)$ 是否是 $f(x)$ 的原函数。

(1) $f(x)$ 在 $x=c$ 连续；

(2) $x=c$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点；

(3) $x=c$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

六、(10 分) 设 $y=f(x)\ (x\ge 0)$ 是连续可导且严格单调增加函数 $f(0)=0, a,b>0$.

证明：$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b g(y)dy\ge ab$

其中 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，而等号当且仅当 $b=f(a)$ 时成立.

七、(10 分) 证明：曲面 $f(ax-bz,ay-cz)=0$ 上的切平面都与某一定直线平行，其中函数 f 连续可微，常数 a,b,c 不同时为 0.

八、(10 分) 计算 $I=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$, a 为实数.

九、(10 分) 计算 $I=\iint_D[a_1a_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)xy+b_1b_2y^2]dxdy$，其中

D 为 $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2\le h, a_1,a_2;b_1,b_2;c_1,c_2$ 为常数, $a_1b_2\ne a_2b_1$, 常数 $h>0$.

十、(10 分) 设流速 $v=xi+yj+zk$，求下列情形的流量.

(1) 穿过圆锥形 $x^2+y^2\le z^2\ (0\le z\le h)$ 的侧表面，法向量朝外；

（2）穿过上述圆锥面的底面，法向量朝外.

以下题目应届生做第十一、十二题，往届生任选两题.

十一、（11 分）设 $f_n(x)=n^\alpha xe^{-nx}$，其中 α 是参数，求 α 的取值范围，使得函数序列 $\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上.

（1）一致收敛；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dx$ 成立；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d}{dx}f_n(x)=\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 成立.

十二、（11 分）$f(x)$ 是周期为 2 的函数，且在区间$[0,2]$上定义为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 0, & 1\le x\le 2\end{cases}$，求 $f(x)$ 的 Fourier 展开式，并利用此结果证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

十三、（11 分）确定函数 $I(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin xdx}{x^y(\pi-x)^{2-y}}$ 的连续范围.

十四、（11 分）叙述 Bolzano-Weierstrass 定理（致密性定理）和闭区间$[a,b]$上连续函数的有界性定理，并用致密性定理证明有界性定理.