电子科技大学

2005 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：代码 405，线性代数

注意事项：1、所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效。

2、 十个大题，共 150 分。

1 (13 分). 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_1a_2 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1a_n & a_2a_n & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$.

2 (10 分). 设A是n阶方阵$(n>2)$, 且$|A|\neq 0$, 证明$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

3 (12分). 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性相关,证明:存在不全为零的数$t_1,t_2,\cdots,t_r$使得对任意向量$\beta$,都有$\alpha_1+t_1\beta,\alpha_2+t_2\beta,\cdots,\alpha_r+t_r\beta(r\geq 2)$也线性相关.

4 (15分). 对于实矩阵$A_{m\times n}$,证明:秩$(A^TA)=$秩(A).

5 (18分). 三元非齐次线性方程组的系数矩阵之秩为1, 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是它的三个解向量,其中

$$\alpha_1+\alpha_2=(1,\ 2,\ 3)^T,\quad \alpha_2+\alpha_3=(0,\ -1,\ 2)^T,\quad \alpha_3+\alpha_1=(1,\ 0,\ -1)^T.$$

1) 试求该线性方程组的通解;

2) 求出一个满足上述条件的非齐次线性方程组.

6 (15分). 1) 设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,属于$\lambda_i$的特征向量为$\alpha_i(1\leq i\leq n)$,求$P^{-1}AP$的特征值与相应的特征向量.

2) 设$f(x)$是一个多项式,A是n阶可逆阵,特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,求$f(A^{-1})$的特征值.

7 (20分). 设A是一个n阶实对称阵,证明:

1) 若存在可逆矩阵B,使$A=B^TB$,则A的主对角线上元素全大于零;

2) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$A$的$n$个正交单位特征向量,对应的特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^T+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^T+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^T$;

3) 当 $n=3$ 时，已知 A 的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，相应的特征向量为

$\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T,\alpha_2=(1,\ -2,\ 1)^T,\alpha_3=(1,0,-1)^T$、求 A.

8 (15 分). 若 A 为 n 阶实对称矩阵, 且其正、负惯性指数 p、N 均不为零. 证明: 存在非零向量 X_1,X_2,X_3 使得 $X_1^TAX_1>0; X_2^TAX_2=0; X_3^TAX_3<0$.

9 (12 分). 设 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 的一个基, A 是 F 上一个 n 行 s 列矩阵, $(\beta_1,\dots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)A$, 证明: $\dim L(\beta_1,\dots,\beta_s)=$ 秩A.

10 (20 分). 设 V 是一个欧氏空间, $\alpha\in V$ 是一个非零向量, 对于 $\xi\in V$, 规定

$$\tau(\xi)=\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha. \qquad ((\cdot,\cdot)\text{表示向量的内积})$$

证明: 1) τ 是 V 的一个线性变换;

2) 当 V 是一个 n 维欧氏空间时, 证明: 存在 V 的一个标准正交基, 使 τ 关于这个基的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.