电子科技大学

2005年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目： 313 数学分析

注：应届生必做第一至十题，往届生必做第一至八题，再在后四题中选做两题。

一、填空题（每小题5分，共40分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$______.

2、设 $f(x+1)=af(x)$ 在 R 上恒成立，且 $f'(0)=b$，其中 $a,\ b$ 为非零常数，则 $f'(1)=$______.

3、已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$，则 $f^{(n)}(0)=$______.

4、$\displaystyle\int\frac{\ln x-1}{(x+\ln x)^2}dx=$______.

5、设曲线 C 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x+y+z=0$ 的交线，计算第一类曲线积分 $I=\oint_C z^2ds=$______.

6、对于幂指数函数 $z=x^y$，令 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$，则 $\dfrac{dz}{dt}=$______.

7、曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于______.

8、设 $f(x)$ 以4为周期，它在 $(-2,2]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0\\ e^x, & 0<x\le 2\end{cases}$，则 $f(x)$ 的Fourier级数的和函数 $S(x)$ 在 $x=-3$ 处有 $S(-3)=$______.

二、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$，证明：对每一个 $c\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得下式成立

$$f(c)=\frac{f''(\xi)}{2}(c-a)(c-b)$$

三、(12分) 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 是一连续函数，$x_0\in[0,1]$，数列 $\{x_n\}:x_{n+1}=x_n,\forall_n\in N$，证明：下述结论等价.

（1）$\{x_n\}$收敛；（2）$\{x_n\}$有唯一极限点；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$．

四、（12分）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，以T为周期，令$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，求证：

（1）$F(x)$一定能表成$F(x)=kx+\varphi(x)$，其中k为某常数，$\varphi(x)$是以T为周期的函数；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

五、（14分）设$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)dx$，

（1）证明I与J收敛；

（2）计算$I+J$，并由此求I与J的值．

六、（12分）对参数$a(a>0)$讨论函数序列$\{f_n(x)\}:f_n(x)=\frac{a^n x}{1+na^n x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$的一致收敛性，（i）$-\infty<x<+\infty$；（ii）$(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$．

七、（12分）指出幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1})x^{2n+1}$的收敛半径，求和函数，并计算数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$之和．

八、（12分）计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}z\cos(x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq R^2, R>0\}$

九、（12分）α为何值时，可使在右半平面$x>0$的向量$\vec{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\alpha}\vec{i}-x^2(x^4+y^2)^{\alpha}\vec{j}$为某二元函数$u(x,y)$的梯度，并确定$u(x,y)$的表达式．

十、（12分）计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=1$取外侧，（$a>0,b>0,c>0$）．

十一、（12分）若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$也收敛．

十二、（12分）判断含参变量积分$I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{t^2}{x^2})}dx$ $(t>0)$的一致收敛性，并求$I(t)$．