2005 年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：314 高等数学

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

(1) 方程 $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$ 的通解是 （　　　　　）.

(2) 已知连续可微函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-\frac{1}{2}$，且 $\int_L[e^{-x}+f(x)]ydx-f(x)dy$ 与路径无关，则 $f(x)=$ （　　　　）.

(3) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n3^n}$ 的收敛半径 $R=($　　　　$)$.

(4) 设 $x=x(t)$ 是由方程 $t-\int_1^{x+t}e^{-u^2}du=0$ 所确定的函数，则 $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0}=($　　　　　$)$.

(5) 已知 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_{-\infty}^{a}te^{2t}dt$，则 $a=($　　　　$)$.

(6) 过点（-1，0，4）且与直线 $\begin{cases}x+2y-z=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$ 垂直，又与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行的直线方程是（　　　　）.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分，每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 设 $\begin{cases}x=f'(t),\\y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 其中 $f(t)$ 为二可微，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=($　　$)$.

(A) 1； (B) t； (C) $f''(t)$； (D) $\frac{1}{f''(t)}$.

(8) 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)dxdy$，
其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 围成的闭区域，则 $f(x,y)=($　　$)$

(A) xy； (B) $2xy$； (C) $xy+\frac{1}{8}$； (D) $2xy+\frac{1}{8}$.

(9) 在过点（1，1）的直线 $y=f(x)$ 中，使得 $\int_0^2[x^2-f(x)]^2dx$ 为最小的直线方程是（　　　　）.

(A) $y=3x-1$； (B) $y=3x+1$； (C) $y=2x-1$； (D) $y=2x+1$.

(10) 设D是中心在原点，半径为 r 的圆所围成的区域，

则 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy=($　　　　$)$.

（A）0;　　　（B）∞;　　　（C）1;　　　（D）e

(11) 若 $f(x)$ 的二阶导数存在，且 $f''(x)>0, f(0)=0$，

则 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 在（0，$+\infty$）内是（　　　）.

（A）单调增加的;　　（B）单调减少的;　　（C）有极大值;　　（D）有极小值。

(12) 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的内侧，则曲面积分 $\oiint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=($　　　$)$.

$(A)-4\pi R^5$;　$(B)4\pi R^5$;　$(C)-\dfrac{12}{5}\pi R^5$;　$(D)\dfrac{12}{5}\pi R^5$.

(13) 在过点（0，0）和 A（π，0）的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 0 到 A 的曲线积分 $\int_L(1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小，则曲线 L 的方程为（　　）.

（A）$y=\cos x$;　（B）$y=-\cos x$;　（C）$y=-\sin x$　（D）$y=\sin x$。

(14) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处（　　　）.

（A）条件收敛;　　（B）绝对收敛;　　（C）发散;　　（D）不能确定。

三、（本题共 9 小题，满分 94. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

（15）（本题满分 12 分）

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2), 0\le x\le\pi$。

（16）（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(\pi)=1$，已知 $\int_L\dfrac{y}{x}\left[\sin x-f(x)\right]dx+f(x)dy$ 在右半平面 $(x>0)$ 内与路径无关.

1) 求 $f(x)$;

2) 在右半平面内计算 $\int_{(1,0)}^{(\pi,\pi)}\dfrac{y}{x}\left[\sin x-f(x)\right]dx+f(x)dy$.

（17）（本题满分 12 分）

已知 $u=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 有连续二阶偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$，试求 $u(x,y)$.

（18）（本题满分 11 分）

若方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+x=0$ 表示弹簧运动，

①c 满足什么条件时，运动是振荡的?

②当 $c=1$ 时，求 $x(t)$ 使得当 $t\approx 0$ 时，$x(t)\approx t$.

（19）（本题满分 12 分）

计算 $\iint\limits_{S} 2\left(1-x^{2}\right)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$，其中$S$为曲线$\begin{cases}x=e^{y}\\ z=0\end{cases}(0\le y\le a)$绕$x$轴旋转而成的曲面外侧.

（20）（本题满分 9 分）

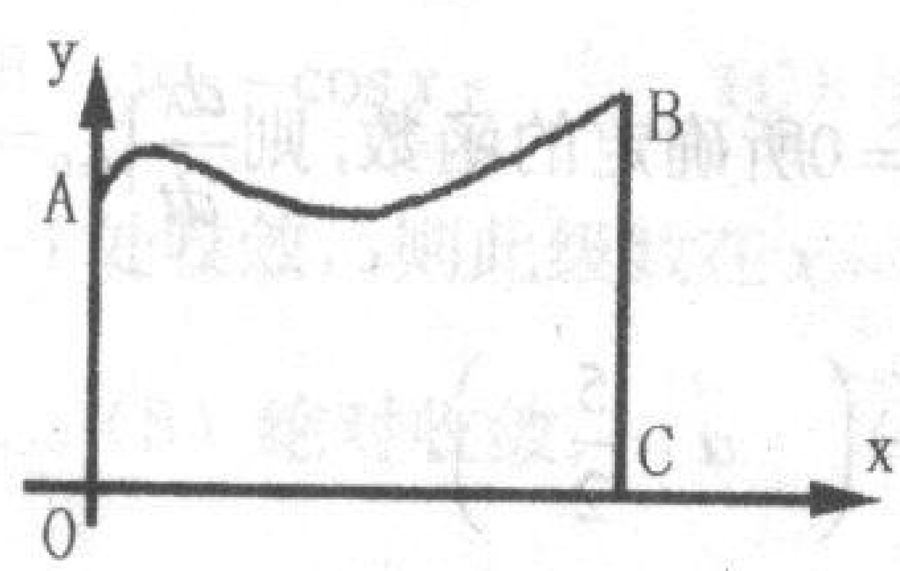
半径为$\sqrt{5}$的圆与x轴相切,它沿x轴滚向抛物线$y=x^{2}+\sqrt{5}$,问它在何处与抛物线相切?这时圆心的坐标为何?

（21）（本题满分 9 分）

判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\ln(2+\frac{1}{n})}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$ 是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛.

（22）（本题满分 9 分）

求曲线 AB 的方程，使图形 $OABC$ 绕 x 轴旋转所形成的旋转体的重心的横坐标等于 B 点的横坐标的 $\frac{4}{5}$。



05001A

（23）（本题满分 9 分）

设 $f(x)$在$[0,\ 1]$上可微，$f(1)=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，求证：$\exists\xi\in(0,\ 1)$，使得$\xi f'(\xi)=-f(\xi)$.