电子科技大学

2007年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：613　数学分析

注意：所有答案，包括填空题答案，都必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、填空题（每小题5分，共40分）

1. 设$0<\lambda<1, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=$__________;

2. 数列$\{x_n\}: x_n = 2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$，则极限$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n =$__________；下极限$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n =$__________;

3. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$的渐近线方程为__________;

4. 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = 2, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = 6$，又$v_n = 3u_{2n-1}-u_{2n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n =$__________;

5. 设$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，变换方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+ky(x^2+y^2)\end{cases}$$

为极坐标方程为__________。

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n(n^2-1)}=$__________;

7. 二重积分$I=\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是圆$x^2+y^2\le x+y$的内部，则$I=$__________;

8. 设$I=\int_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中$L$为平面$x+y+z=1$被三个坐标面所截三角形$\Sigma$的边界，若从$x$轴正向看去，定向为逆时针方向，则$I=$__________;

二、（14分）叙述闭区间上连续函数的有界性定理和最值定理，并用有界性定理证明最值定理.

三、（12分）设数列$\{x_n\}: x_1=1, x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n}$，讨论$\{x_n\}$的敛散性，若收敛求其极限。

四、（12 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，试证：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $|f'(\xi)|\geq\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$。

五、（12 分）计算 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 。

六、（12 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, & x\neq 0.\\ A, & x=0.\end{cases}$

（1）确定常数 A；使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 任意次可导，并求它的幂级数展开式。

（2）求 $f^{(6)}(0)$ 和 $f^{(7)}(0)$。

七、（12 分）求累次积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}dz$。

八、（12 分）对参数 α，讨论 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}dx$ 的绝对收敛性与条件收敛性。

九、（12 分）设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty;c,d]$ 连续，对 $[c,d)$ 上每一个 y，$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛，但积分在 $y=d$ 发散，证明：这个积分在 $[c,d)$ 非一致收敛。

十、（12 分）计算 $I=\iint_S(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)ds$，$S:x^2+y^2=z^2$，$0\leq z\leq h$，$\cos\alpha$，$\cos\beta,\cos\gamma$ 为此曲面外法线方向余弦。